

FONDAMENTI DI MECCANICA E BIOMECCANICA

appunti delle lezioni del corso tenuto dal

prof. Bruno Picasso

III PARTE

DINAMICA

3. GEOMETRIA DELLE MASSE

3.1 Baricentro di un corpo.

Il baricentro è il punto d'applicazione della risultante delle forze elementari di massa che agiscono su di esso. La sua posizione può essere determinata ricordando che il momento risultante delle forze elementari di gravità agenti sulle singole particelle che compongono il corpo, rispetto ad un polo arbitrario, è eguale al momento della risultante, cioè al momento del peso del corpo. Le relazioni che si ottengono per le coordinate del baricentro, sono le seguenti:

Si ha:

$$\int \rho(\mathbf{r}_p \times \mathbf{g}) dx dy dz = \mathbf{r}_G \times \left(\int \rho dx dy dz \right) \mathbf{g}$$

da cui si ricava :

$$\int \rho \mathbf{r}_p dx dy dz \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_G \int \rho dx dy dz \times \mathbf{g}$$

$$\int \rho \mathbf{r}_p dx dy dz = \mathbf{r}_G \int \rho dx dy dz$$

Dove $\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}$, se abbiamo adottato un

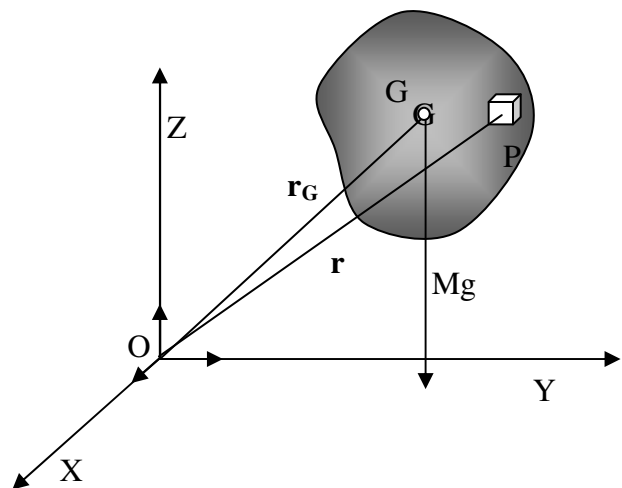
sistema di riferimento con l'asse z perpendicolare al terreno e diretto verso l'alto. Anche se ci siamo riferiti al caso delle forze di gravità per la deduzione delle equazioni, la posizione del baricentro non è dipendente dal campo di forze di massa che si sceglie per ottenerla. M è la massa totale del corpo considerato, \mathbf{r}_p e \mathbf{r}_G sono rispettivamente i vettori che rappresentano la posizione della massa elementare, rappresentata dal cubetto in figura, e il punto di applicazione della risultante, cioè il baricentro. Alla relazione vettoriale precedente corrispondono le seguenti tre relazioni scalari:

$$\int \rho y g dx dy dz = y_G Mg$$

$$\int \rho x g dx dy dz = x_G Mg$$

$$\int \rho z g dx dy dz = z_G Mg$$

da cui si trae



$$x_G = \frac{\int \rho x dx dy dz}{\int \rho dx dy dz} = \frac{\int \rho x dx dy dz}{M}$$

$$y_G = \frac{\int \rho y dx dy dz}{\int \rho dx dy dz} = \frac{\int \rho y dx dy dz}{M}$$

$$z_G = \frac{\int \rho z dx dy dz}{\int \rho dx dy dz} = \frac{\int \rho z dx dy dz}{M}$$

3.1.1 Baricentri di figure piane.

Si possono applicare le formule precedenti, con l'avvertenza che una delle coordinate diventa ridondante, in genere la z, se si assume che la figura giaccia nel piano x-y, e che la densità ρ diventi una densità di area, in genere di valore unitario, invece che una densità di volume. Si parte anche dalla considerazione che, se la figura ha un asse di simmetria, il baricentro si trova su questo asse. Se di assi di simmetria ne esistono due, il baricentro si trova all'intersezione di questi. Il lettore può trovare nei manuali tabelle che forniscono la posizione del baricentro per le principali figure piane, in particolare i poligoni regolari.

Esempi

Baricentro di un rettangolo. Si trova nell'intersezione delle due diagonali.

Baricentro di un cerchio. Si trova nel suo centro.

Baricentro di sezioni piane non regolari.

Cominciamo a trovare la posizione del baricentro per una sezione piana, non costituita da un poligono regolare, ad esempio la sezione ad L rappresentata in figura:

Si considerano le aree rettangolari della sezione di base e della costola verticale, rappresentate dai vettori A_1, A_2 orizzontali. La coordinata y_G del baricentro è data dalla relazione:

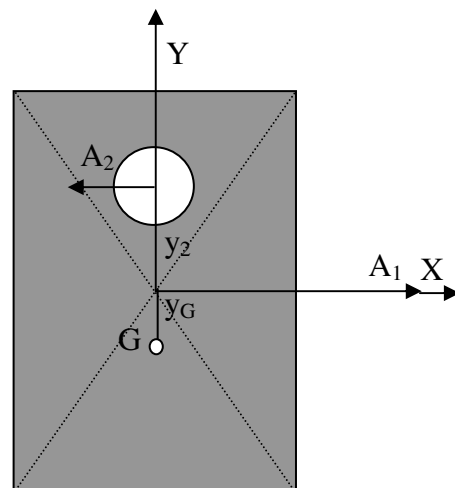
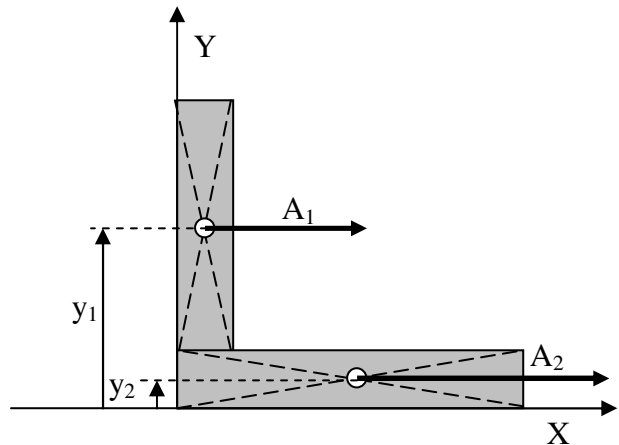
$$y_G = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

Analogamente considerando un insieme di vettori verticali che rappresentano le stesse aree A_1, A_2 si ottiene:

$$x_G = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}$$

Baricentro di sezioni piane forate.

Quando, come nel caso in figura, una sezione non è omogenea, e presenta delle discontinuità si può sempre ricorrere al principio di considerare le singole aree che costituiscono la figura come dei vettori, con l'avvertenza che le aree vuote saranno rappresentate da vettori di verso contrario a quello delle aree piene. Nel caso in figura si



avrà:

$$A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot y_2 = (A_1 - A_2) \cdot (-y_G) \quad y_G = -A_2 \cdot y_2 / (A_1 - A_2)$$

Data la simmetria della sezione, la coordinata x del baricentro è nulla.

Baricentro di corpi lineari.

Se il corpo presenta una sola dimensione, ovvero può essere assimilato ad un segmento dritto o curvo, il calcolo del baricentro si esegue con le formule precedenti adattate al caso particolare.

Esempio

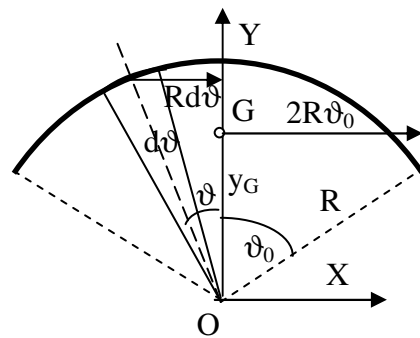
Baricentro di un arco di circonferenza d'apertura 2ϑ :

Considerando l'arco diviso in elementi infinitesimi di apertura $d\vartheta$ e creando un sistema di forze infinitesime con direzione orizzontale e modulo $Rd\vartheta$ la somma dei momenti di queste forze rispetto al polo O sarà eguale al momento della loro risultante il cui modulo è $2R\vartheta_0$ con braccio y_G . Si ha allora:

$$2 \int_0^{\vartheta_0} RR \cos \vartheta d\vartheta = 2R\vartheta_0 y_G \quad \text{da cui} \quad y_G = R \frac{\sin \vartheta_0}{\vartheta_0}$$

per una semicirconferenza si ha :

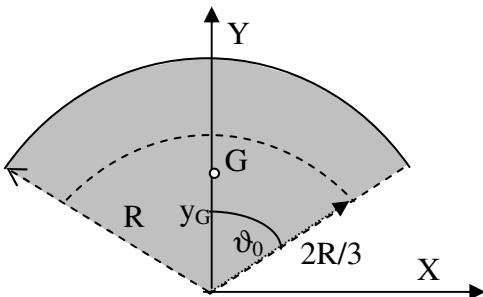
$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$



Baricentro di un settore circolare

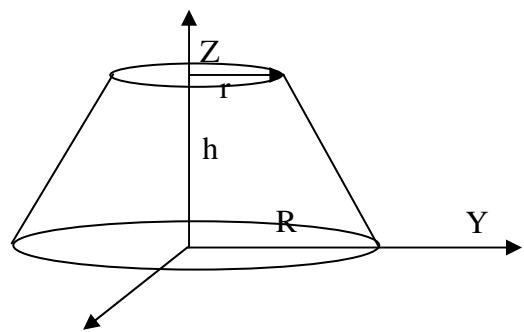
Considerando un settore circolare d'apertura $2\vartheta_0$ come nel caso precedente, per calcolare il baricentro possiamo sostituire ad ogni settore di apertura infinitesima $d\vartheta$ un punto materiale di massa (area) $Rd\vartheta$, posto nel baricentro del settore, cioè a distanza $\frac{2}{3}R$ dal centro O. Al limite, per $d\vartheta$ tendente a 0 tutti questi punti formeranno una circonferenza di raggio $\frac{2}{3}R$, il cui baricentro e quindi quello del settore circolare originario sarà a distanza $y_G = \frac{2}{3}R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$; per un semicerchio si ha

$$y_G = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$$



3.1.2 Baricentro di corpi solidi.

Ancora una volta è possibile applicare le formule precedenti, o ricorrere alle tabelle che forniscono la posizione del baricentro per una larga serie di solidi regolari. In molti casi, come quello dei solidi a simmetria cilindrica, le formule precedenti vanno trasformate passando alle coordinate polari. Nel caso esistano assi di simmetria, ancora una volta il baricentro si troverà su questi e questa proprietà rende agevole la ricerca. A titolo d'esempio d'applicazione della procedura indicata, si procederà alla ricerca del baricentro di un tronco di cono. E' da ricordare che la posizione del baricentro deve sempre essere definita rispetto ad un sistema di coordinate assunto in precedenza. Osservando che l'asse z è di simmetria, si

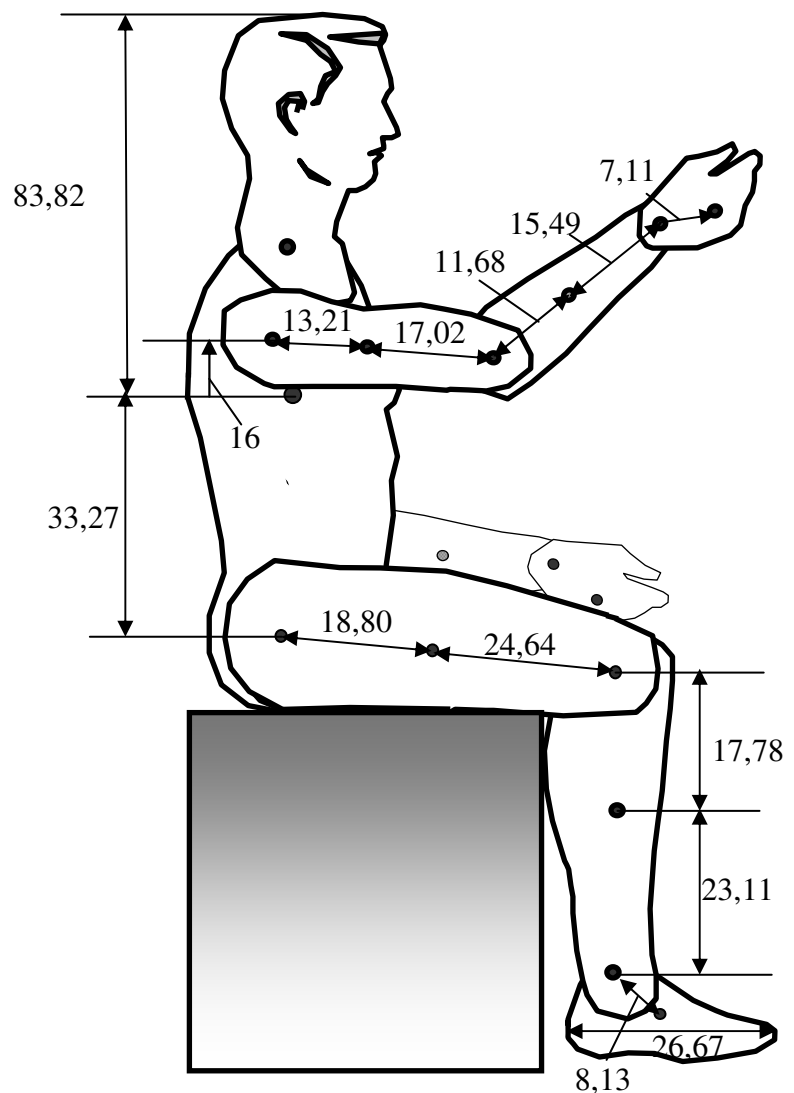


deduce che le coordinate del baricentro sono $x_G = y_G = 0$. Per quanto riguarda la coordinata z_G , si pensi che ogni strato infinitesimo di raggio generico ρ e spessore dz , ottenuto sezionando il tronco di cono con piani perpendicolari a z avrà una massa infinitesima pari a $\pi\rho^2 dz$. Considerando la massa di ogni sezione infinitesima come una forza orizzontale di momento pari a $\pi\rho^2 z dz$, poichè $\rho = R - \frac{(R-r)z}{h}$, integrando i momenti elementari delle sezioni rette infinitesime rispetto all'origine e dividendo il momento risultante per il volume del tronco di cono si ha:

$$z_G = \frac{\int_0^h \pi \left(R - \frac{(R-r)z}{h} \right)^2 z dz}{\int_0^h \pi \left(R - \frac{(R-r)z}{h} \right)^2 dz} = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

A titolo d'esempio e per un utilizzo successivo, si ritiene utile fornire qualche dato, desunto dalla letteratura, sulle dimensioni e sulla posizione dei baricentri di segmenti corporei per una persona di media statura. I segmenti sono qui concepiti come sezioni piane e perdono così una dimensione.

Poiché il corpo umano può assumere nel suo movimento configurazioni assai diverse, la posizione del baricentro del corpo subisce di conseguenza forti cambiamenti. Se sono note le posizioni dei baricentri dei vari segmenti, la posizione del baricentro nel corpo intero, in qualunque configurazione viene trovata con semplici operazioni, alla base delle quali sta l'assunzione che il corpo può essere considerato un insieme di punti materiali, di valore corrispondente alla massa dei vari segmenti, posizionati nei rispettivi baricentri. Nella figura precedente è calcolata la posizione del baricentro per una persona seduta. La tabella riportata nel seguito, tratta dalla letteratura, fornisce le caratteristiche di peso e posizione del baricentro di tutti i segmenti corporei. E' appena necessario ricordare che esistono grandi masse di dati biometrici a cui è possibile facilmente attingere. Più moderne e aggiornate sono le banche dati costituite da modelli tridimensionali del corpo umano,



ottenuti con un processo di scansione, che replica con precisione la morfologia del corpo, inclusi gli organi interni. Modelli di questo tipo si prestano a studi d'analisi statica e dinamica, purchè il modello grafico, in altre parole il "rendering" tridimensionale, sia convertito in un equivalente

modello meccanico, dove ogni organo ha la sua massa e le sue caratteristiche meccaniche. I modelli descritti si prestano anche allo studio dei traumi prodotti da accelerazioni elevate e collisioni, sia esternamente che negli organi interni. Molti programmi d'analisi dinamica superano la tradizionale distinzione tra corpi rigidi e corpi deformabili, per giungere ad analisi complesse, che forniscono, in ogni istante del moto, il campo di velocità ed accelerazione e, cosa assai più complessa, lo stato di sforzo in ogni elemento. Programmi di questo tipo (per citarne uno solo il software ADAMS) sono largamente usati nella ricerca scientifica e nella pratica professionale.

PESO MEDIO DEI SEGMENTI CORPOREI DI UN UOMO DI 670 N (68,4 KG) ESPRESSO IN PERCENTUALE DEL PESO TOTALE E POSIZIONE DEI BARICENTRI.	
PESO DEI SEGMENTI E PERCENTUALE SUL PESO TOTALE	POSIZIONE BARICENTRO
Testa 46,2 N	Nel seno sfenoidale, 4 mm oltre il margine antero-inferiore della sella.
Testa e collo 52,9 N (7,9 %)	Sulla superficie inferiore dell'osso basioccipitale o nell'osso 23±5 mm dal dorso della sella.
Testa collo e tronco 395,3 (59 %)	Anteriormente alla XI vertebra toracica
Braccio 18,1 N (2,7 %)	Nel capo mediale del tricipite, adiacente all'incisura radiale
Avambraccio 10,7 N (1,6 %)	11 mm prossimale alla parte distale dell'inserzione del pronatore quadrato.
Mano 40 N (0,6 %)	Sull'asse del 3° metacarpo 2 mm in profondità rispetto alla superficie cutanea volare.
Arto superiore 32,8 N (4,9 %)	
Avambraccio e mano 14,7 N (2,2 %)	
Coscia 65,0 N (9,7 %)	Nel vasto mediale 13 mm medialmente alla linea aspra, sotto il canale degli adduttori.
Gamba 30,2 N (4,5 %)	35 mm sotto il popliteo, nella parte posteriore del tibiale posteriore; 16 mm sopra l'estremità prossimale del tendine d'Achille.
Piede 9,4 N (1,4 %)	Nei legamenti plantari o appena sopra i muscoli profondi del piede adiacenti, sotto la metà prossimale del 2° e 3° cuneiforme
Arto inferiore 104,5 N (15,6 %)	
Gamba e Piede 40,2 N (6,0 %)	
Intero Corpo	Anteriormente alla 2° vertebra sacrale
Basato sui dati di Dempster, 1955	

3.3 PROPRIETA' INERZIALI

Le proprietà inerziali di un corpo solido o di un sistema di corpi sono rappresentate dalla matrice di massa \mathbf{M} e dalla matrice d'inerzia \mathbf{J} . La matrice di massa è diagonale quando i coefficienti d'inerzia non sono accoppiati, in altri termini, quando l'energia cinetica di un sistema può essere espressa come la somma delle energie cinetiche dei corpi che lo compongono. In questo caso la matrice di massa ha la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & m_1 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & m_2 \\ & & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

La matrice contiene tante terne di termini eguali sulla diagonale quante sono le masse che compongono il sistema. La matrice d'inerzia di un corpo solido ha la forma:

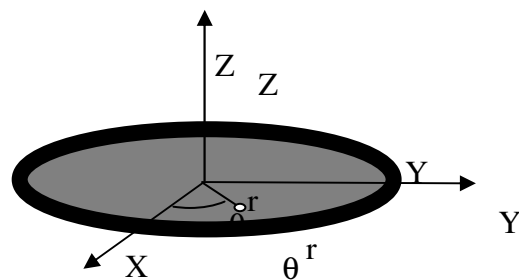
$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

E' ben noto che la matrice diventa diagonale quando gli assi rispetto ai quali si calcolano i momenti d'inerzia sono assi principali d'inerzia. Le espressioni dei termini che compaiono nella matrice d'inerzia sono:

$$J_{xx} = \iiint \rho(y^2 + z^2) dx dy dz \quad J_{yy} = \iiint \rho(x^2 + z^2) dx dy dz \quad J_{zz} = \iiint \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$J_{xy} = \iiint \rho(xy) dx dy dz \quad J_{xz} = \iiint \rho(xz) dx dy dz \quad J_{yz} = \iiint \rho(yz) dx dy dz$$

Applicare le formule precedenti per calcolare i momenti d'inerzia di corpi solidi richiede semplici passaggi matematici. Nelle tabelle dei manuali è presente una vasta rassegna dei valori dei momenti d'inerzia. Ricordiamo che, se il corpo presenta un asse di simmetria, questo asse è anche asse principale d'inerzia. Come esempio di calcolo consideriamo quello dei momenti d'inerzia di un solido cilindrico regolare rispetto agli assi principali d'inerzia baricentrici, diretti cioè come l'asse del cilindro e come due diametri ortogonali qualsiasi della sua base, in corrispondenza di metà altezza. In questo caso le formule precedenti devono essere trasformate per tener conto della simmetria circolare del cilindro. Se consideriamo inizialmente una sezione di spessore infinitesimo dz del cilindro, per questa possiamo scrivere facilmente l'espressione del momento dJ_{zz} . Passando dalle coordinate Cartesiane a quelle polari otteniamo :



$$dJ_{zz} = dz \int \int \rho 2\pi r r^2 dr d\vartheta = \frac{\rho\pi r_0^4}{2} dz$$

Il momento d'inerzia totale rispetto all'asse del cilindro si ottiene integrando su z l'espressione ottenuta, ricavando:

$$J_{zz} = \frac{M r_0^2}{2} \text{ essendo } M = \rho \pi r_0^2 h$$

I momenti rispetto agli altri due assi si ottengono per lo strato infinitesimo dalle relazioni seguenti:

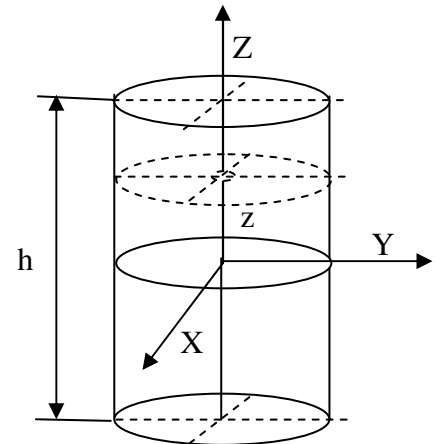
$$dI_{xx} = \rho \left(\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \vartheta dr d\vartheta \right) dz = \rho \left(\frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) dz = \rho \pi \frac{R^4}{4} dz = dI_{yy}$$

Si ricordi ora che, per il teorema di Huygens, relativo al trasporto dei momenti d'inerzia, il momento d'inerzia rispetto ad un qualunque asse è pari al momento rispetto ad un asse parallelo e baricentrico, più il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza dei due assi. Si ha allora, considerando che il momento d'inerzia di una sezione di spessore infinitesimo dz,

rispetto ad un asse diametrale vale $\rho \frac{\pi r_0^4}{4} dz$ e il momento di

trasporto $\rho \frac{\pi r_0^2}{4} z^2 dz$, integrando rispetto a z si ha:

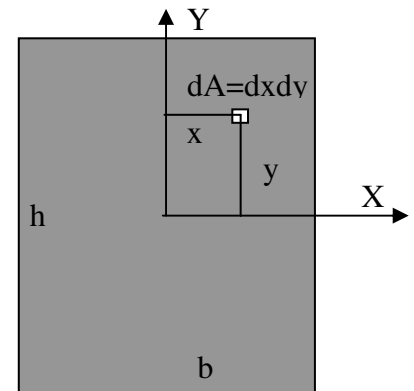
$$J_{xx} = J_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\pi r_0^4}{4} + \pi r_0^2 z^2 \right) dz = \rho \pi \left(\frac{r_0^4 h}{4} + \frac{r_0^2 h^3}{12} \right) = M \left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$



3.2.1 Momenti d'inerzia di figure piane.

Nel campo dell'analisi delle sollecitazioni entrano in gioco le proprietà inerziali delle sezioni. La capacità di resistere a determinati tipi di sollecitazione è infatti legata alla forma della sezione (è ben noto che se un'asta è sollecitata a torsione la sua rigidità torsionale non cambia molto se si toglie tutto il materiale interno lasciando soltanto un piccolo spessore di materiale in prossimità della superficie esterna, cioè si trasforma la sezione in anulare).

I momenti d'inerzia di sezioni piane hanno le dimensioni di una lunghezza alla quarta potenza. Si prenda in esame ad esempio la sezione rettangolare in figura e si vogliano definire e calcolare i momenti d'inerzia della sezione rispetto ai tre assi coordinati. Si consideri un elemento infinitesimo d'area dA distante x e y rispettivamente dagli assi Y e X. I suoi momenti d'inerzia rispetto agli assi si ottengono per semplificazione dalle espressioni già trovate per i momenti d'inerzia di massa.



$$dI_{xx} = y^2 dA = y^2 dx dy \quad dI_{yy} = x^2 dA = x^2 dx dy$$

$$dI_{xy} = xy dA = xy dx dy$$

$$dI_{zz} = (x^2 + y^2) dA = (x^2 + y^2) dx dy$$

Integrando le espressioni precedenti a tutta l'area della sezione, larga b e alta h si ha:

$$I_{xx} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dx dy = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12} \quad I_{yy} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dx dy = \frac{b^3h}{12} = \frac{Ab^2}{12}$$

$$I_{zz} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{A(b^2 + h^2)}{12} = I_{xx} + I_{yy}$$

Utilizzando il teorema di Huygens di trasposizione dei momenti d'inerzia si ottengono facilmente i momenti rispetto ad altri assi, non baricentrici ma paralleli a X,Y,Z. Ad esempio per ottenere il valore del momento d'inerzia I_{xx} rispetto ad un asse parallelo all'asse X e passante per la base inferiore si ottiene:

$$I_{x'x'} = I_{xx} + A * \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

Questo risultato poteva anche essere ottenuto direttamente mediante l'integrale che esprimeva I_{xx} , cambiando i limiti d'integrazione. Si lascia al lettore la verifica di quanto detto.

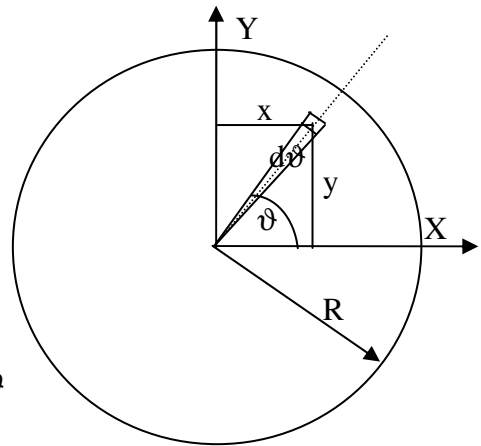
Momenti d'inerzia di una sezione circolare

Si consideri un elemento infinitesimo d'area limitato tra due raggi formanti l'angolo infinitesimo $d\vartheta$ e due archi infinitesimi di circonferenza di raggio rispettivamente r e $r+dr$. L'elemento, la cui area infinitesima vale, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, $r d\vartheta dr$ si trovi alle distanze y e x rispettivamente dagli assi X e Y. I momenti d'inerzia infinitesimi rispetto ai tre assi hanno le espressioni:

$$dI_{xx} = r d\vartheta dr * r^2 \sin^2 \vartheta \quad dI_{yy} = r d\vartheta dr * r^2 \cos^2 \vartheta$$

$$dI_{xy} = r d\vartheta dr * r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$dI_{zz} = r d\vartheta dr * (r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta) = dI_{xx} + dI_{yy}$$



I momenti d'inerzia di tutta la sezione si ottengono per integrazione delle espressioni precedenti:

$$I_{xx} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \vartheta dr d\vartheta = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 2\vartheta)}{2} d\vartheta = \pi \frac{R^4}{4} = I_{yy}$$

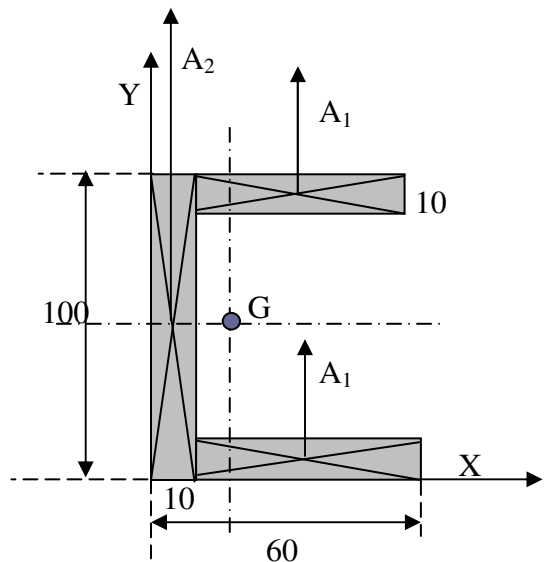
$$I_{xy} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin \vartheta \cos \vartheta dr d\vartheta = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin(2\vartheta) d\vartheta = 0 \quad I_{zz} = 2I_{xx} = \pi \frac{R^4}{2}$$

Momenti d'inerzia di sezioni composte.

Spesso abbiamo a che fare con sezioni composte da parti riconoscibili come rettangoli, poligoni regolari, cerchi o semicerchi etc. In tutti questi casi il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico si calcola trovando prima il baricentro, poi calcolando i momenti d'inerzia baricentrici delle singole parti che compongono la sezione e quindi applicando il teorema di Huygens per ottenere i momenti d'inerzia delle singole parti rispetto all'asse baricentrico della sezione intera.

Esempio : Sezione a C.

Si voglia calcolare il momento d'inerzia della sezione a C in figura rispetto ad un asse baricentrico parallelo



all'asse X della figura. Calcoliamo prima il baricentro la cui coordinata y risulta pari a 50 per la simmetria della sezione. La coordinata x_G si ottiene scrivendo che i momenti delle aree elementari che compongono la sezione, pensate come componenti Y di forza, devono eguagliare il momento della risultante:

$$2A_1x_1 + A_2x_2 = (2A_1 + A_2)x_G$$

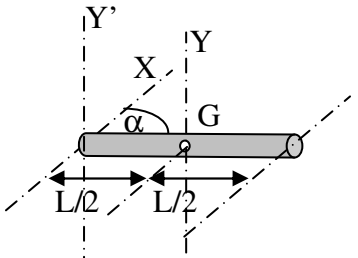
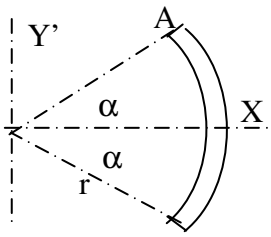
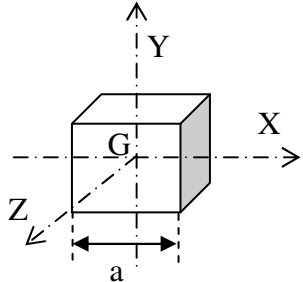
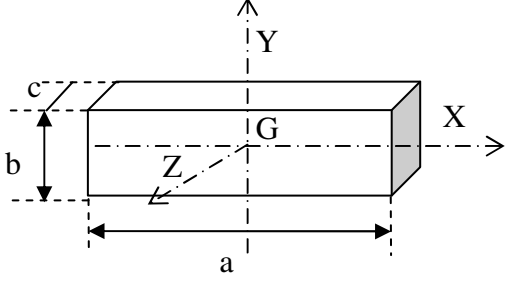
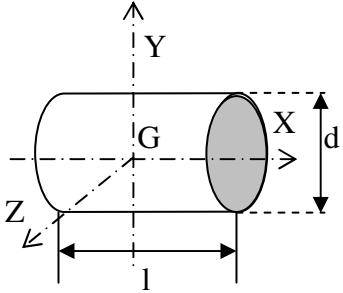
Svolti i semplici calcoli si ottiene: $x_G = 20$

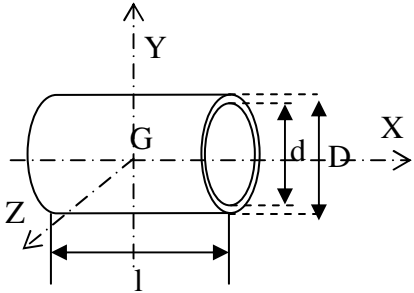
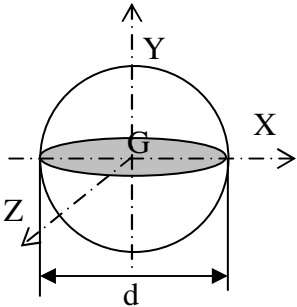
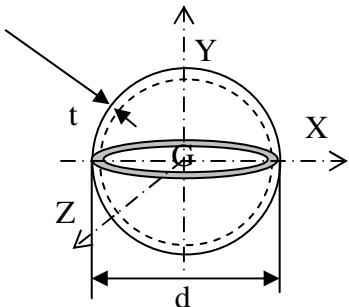
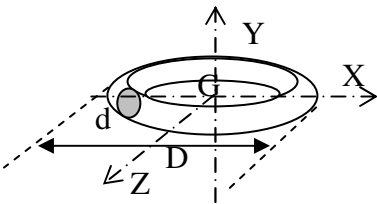
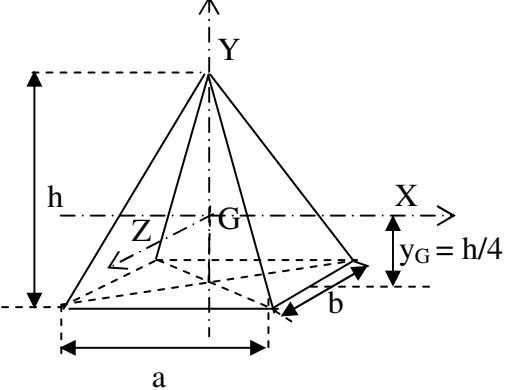
Volendo ora calcolare il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse X di figura è sufficiente ricordare che la sezione è composta da tre rettangoli. Per le ali della sezione a C il momento d'inerzia rispetto ad un asse che passa per il baricentro delle ali stesse è $\frac{50 \cdot 10^3}{12} = 4167$, per l'anima

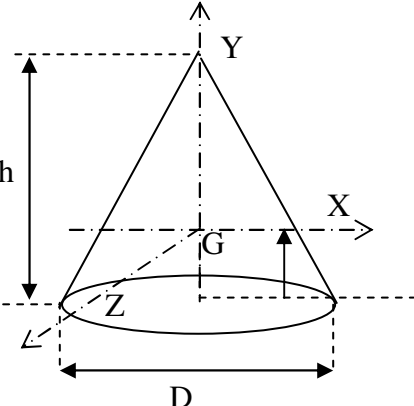
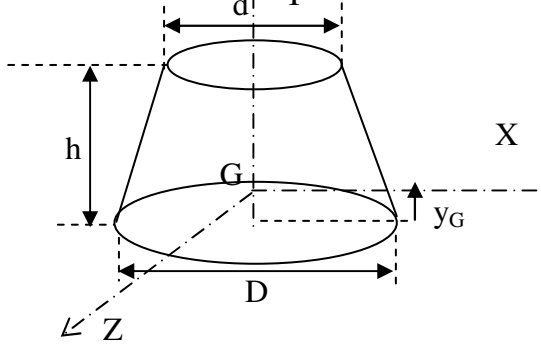
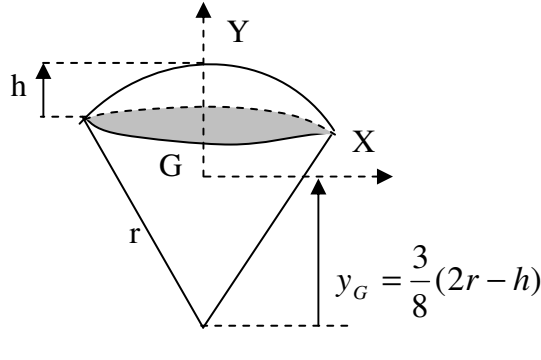
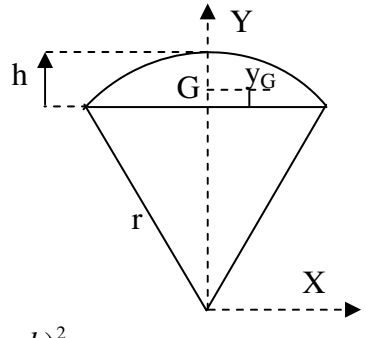
$\frac{10 \cdot 100^3}{12} = 833333$. Tenendo conto dei momenti di trasporto si

ottiene: $J_{xx} = 2 \cdot (4167 + 600 \cdot 45^2) + 833333 = 20139683 \text{ cm}^4$. E' facile osservare che l'elevato valore del momento d'inerzia, che è in rapporto con la rigidezza a flessione, viene ottenuto perchè le ali sono lontane dall'asse rispetto al quale il momento d'inerzia viene calcolato.

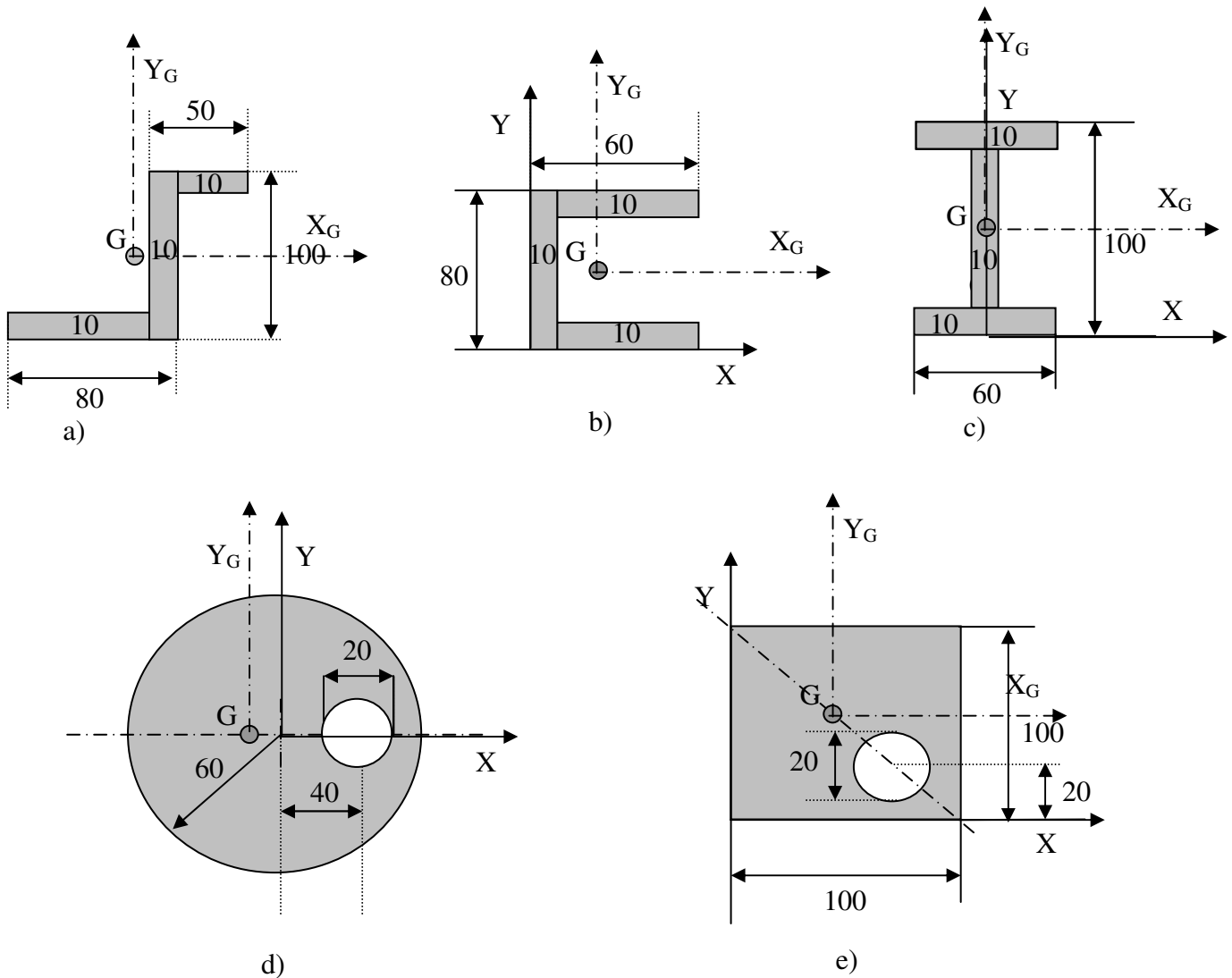
3.4 PROPRIETA' D'INERZIA DI SOLIDI REGOLARI

Solido	Volume	Momento d'inerzia
	<p>Asta sottile rettilinea</p> $V = A * L$	$I_{Y'Y'} = M \frac{L^2}{3}$ $I_{YY} = M \frac{L^2}{12}$ $I_{XX} = M \frac{L^2}{3} * \sin \alpha$
	<p>Asta sottile curva</p> $V = 2\alpha * r * A$	$I_{Y'Y'} = M \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} \right)$ $I_{XX} = M \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} \right)$
	<p>Cubo</p> $V = a^3$	$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = M \frac{a^2}{6}$
	<p>Parallelepipedo</p> $V = a * b * c$	$I_{XX} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$ $I_{YY} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$ $I_{ZZ} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$
	<p>Cilindro pieno</p> $V = \pi \frac{d^2}{4} * l$	$I_{XX} = \frac{Md^2}{8}$ $I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{M}{4} \left(\frac{d^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$

	<p>Cilindro cavo</p> $V = \pi l \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right)$	$I_{XX} = \frac{M}{8} * (D^2 + d^2)$ $I_{YY} = \frac{M}{16} * (D^2 + d^2 + 4 \frac{b^2}{3})$
	<p>Sfera</p> $V = \frac{\pi d^3}{6}$	$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{Md^2}{10}$
	<p>Sfera cava</p> $V = \pi d^2 t$	$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{Md^2}{6}$
	<p>Toro</p> $\pi^2 \frac{Dd}{4}$	$I_{XX} = M \left(\frac{D^2}{8} + \frac{5}{32} d^2 \right)$ $I_{YY} = M \left(\frac{D^2}{4} + \frac{3}{16} d^2 \right)$
	<p>Piramide</p> $V = ab \frac{h}{3}$	$I_{XX} = \frac{M}{20} (b^2 + \frac{3h^2}{4})$ $I_{YY} = \frac{M}{20} (a^2 + b^2)$

	<p style="text-align: center;">Cono</p> $V = \frac{\pi D^2 h}{12}$	$I_{xx} = \frac{3}{40} M (D^2 + h^2)$ $I_{yy} = \frac{3}{40} M D^2$
	<p style="text-align: center;">Tronco di cono</p> $V = \frac{\pi h}{12} (D^2 + d^2 + \sqrt{D^2 d^2})$ $y_G = \frac{h(D^2 + 2Dd + 3d^2)}{4(D^2 + Dd + d^2)}$	$I_{yy} = \frac{3}{40} M \frac{(D^5 - d^5)}{(D^3 - d^3)}$
	<p style="text-align: center;">Settore sferico</p> $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$	$I_{yy} = \frac{M}{5} (3rh - h^2)$
	<p style="text-align: center;">Segmento sferico</p> $V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$	$I_{yy} = M \left(r^2 - \frac{3rh}{4} + \frac{3h^2}{20} \right) \frac{2h}{3r-h}$ $y_G = \frac{3(2r-h)^2}{4(3r-h)}$

3.5 ESERCIZI



Baricentri e momenti d'inerzia

S.1

Si calcoli la posizione del baricentro delle sezioni in figura e il momento d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale baricentrico.

Soluzioni (Coordinate in mm momenti d'inerzia in mm^4)

a) $x_G = 66,42$ $y_G = 43,57$ $I_{XX} = 6,97 \cdot 10^6$ $I_{YY} = 10,83 \cdot 10^6$ $I_{X_G X_G} = 2,98 \cdot 10^6$ $I_{Y_G Y_G} = 1,57 \cdot 10^6$

b) $x_G = 21,67$ $y_G = 40$ $I_{XX} = 4,54 \cdot 10^6$ $I_{YY} = 1,46 \cdot 10^6$ $I_{X_G X_G} = 1,66 \cdot 10^6$ $I_{Y_G Y_G} = 0,61 \cdot 10^6$

c) $x_G = 0$ $y_G = 0$ $I_{XX} = 7,87 \cdot 10^6$ $I_{YY} = 0,37 \cdot 10^6$ $I_{X_G X_G} = 2,87 \cdot 10^6$ $I_{Y_G Y_G} = 0,37 \cdot 10^6$

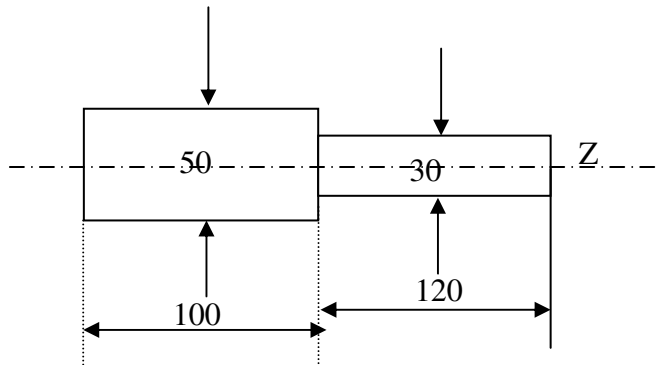
d) $x_G = -1,14$ $y_G = 0$ $I_{XX} = 10,17 \cdot 10^6$ $I_{YY} = 9,66 \cdot 10^6$ $I_{X_G X_G} = 10,17 \cdot 10^6$ $I_{Y_G Y_G} = 9,65 \cdot 10^6$

d) $x_G = 49,03$ $y_G = 50,97$ $I_{XX} = 33,2 \cdot 10^6$ $I_{YY} = 31,31 \cdot 10^6$ $I_{X_G X_G} = 8,03 \cdot 10^6$ $I_{Y_G Y_G} = 8,03 \cdot 10^6$

S.2 L'albero di trasmissione rappresentato in Figura è d'acciaio con densità $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Si calcoli il momento d'inerzia di massa rispetto all'asse z. Le quote sono in mm.

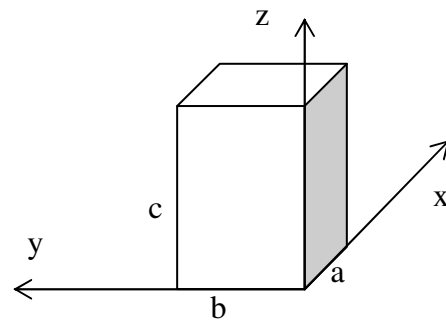
Soluzione.

Ricordando che il momento rispetto all'asse di un corpo cilindrico è uguale a $\frac{Mr^2}{2}$ e sommando i contributi delle due parti dell'albero si ha:



$$J_{zz} = 7850 * 3,14 * 0,025^2 * \frac{0,025^2}{4} + 7850 * 3,14 * 0,015^2 * \frac{0,015^2}{4} = 2,32 * 10^{-2} \text{ kg} * \text{m}^2$$

S.3 Nel corpo a forma di parallelepipedo in figura le dimensioni secondo x,y,z sono rispettivamente $a = b = 1 \text{ m}$, $c = 1,5 \text{ m}$. La densità del corpo è pari a 3500 kg/m^3 . Determinare il valore del momento d'inerzia I_{zz} rispetto all'asse z passante per lo spigolo verticale.



Soluzione.

Ricordando che $J_{zz} = \iiint_{x y z} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$ si ha:

$$J_{zz} = \rho \int_0^{1,5} dz \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + y^2) dx = \rho \int_0^{1,5} dz \int_0^1 dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^1 = \rho \int_0^{1,5} dz \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy =$$

$$= \rho \int_0^{1,5} \frac{2}{3} dz = 3500 \text{ kg} * \text{m}^2$$

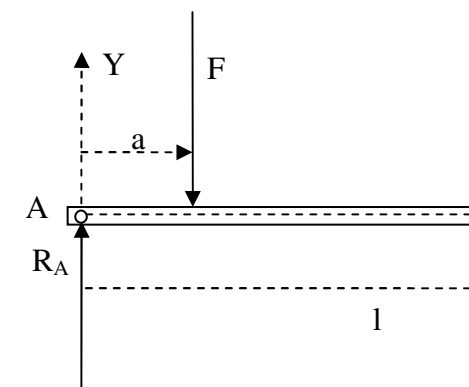
4. ANALISI DELLE FORZE

4.1 OPERAZIONI SULLE FORZE

Ricordiamo che le forze sono rappresentate in un sistema Cartesiano da vettori con tre componenti secondo gli assi coordinati. I momenti delle forze e delle coppie si rappresentano come vettori orientati secondo la direzione dell'asse di rotazione e con verso positivo se questa rotazione è antioraria. Il modulo del vettore momento si ottiene nel modo usuale dalle sue componenti.

Nei problemi statici e in quelli dinamici si presenta spesso il problema di ottenere la risultante e il momento risultante, rispetto ad un polo assegnato, di un sistema di forze. Il problema può essere risolto ricorrendo alle operazioni sui vettori, già presentate. E' necessario però chiarire che le forze sono vettori applicati, caratterizzati da modulo, direzione, verso e punto d'applicazione. Per quanto riguarda gli effetti che una forza produce non è in generale ammesso spostare una forza, né parallelamente a se stessa, né lungo la sua retta di applicazione. Due semplici esempi serviranno a chiarire quanto detto:

Nella trave in figura se trasportiamo al centro la forza applicata vicino all'estremità sinistra, otteniamo un effetto diverso dal punto di vista delle sollecitazioni nei vari punti della trave e anche da quello del calcolo delle reazioni. E' evidente che le reazioni vincolari, vale a dire le forze che equilibrano la forza esterna, saranno eguali quando la forza esterna sarà al centro della trave, mentre sarà maggiore la reazione a sinistra se la forza esterna sarà collocata a sinistra.

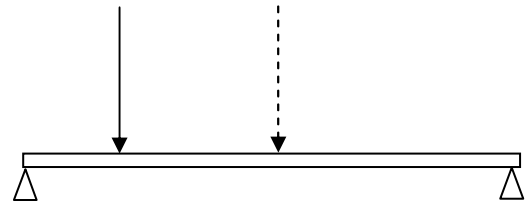


tutti nella direzione Y possiamo scrivere la condizione di annullamento della risultante con riferimento alle sole componenti Y e quindi scrivere le equazioni scalari di equilibrio che esprimono la nullità della risultante e del momento risultante rispetto ad A:

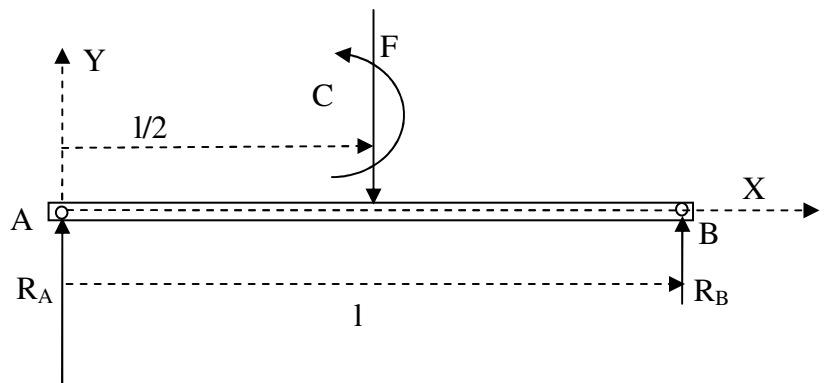
$$R_A + R_B - F = 0$$

$$R_B l - F a = 0$$

Le due equazioni d'equilibrio scritte portano facilmente a trovare le reazioni vincolari incognite:



questo sistema di forze deve essere equilibrato, deve avere in altre parole risultante nulla e momento risultante nullo rispetto a qualunque polo. Possiamo quindi disegnare di nuovo la trave dopo la sostituzione dei vincoli con le reazioni vincolari. Poiché le forze sono rappresentate da vettori agenti



$$R_B = F \frac{a}{l}$$

$$R_A = F \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

Se ora trasportiamo la forza F nel punto centrale della trave aggiungendo una coppia di trasporto, pari a $C = F\left(\frac{l}{2} - a\right)$, avente verso antiorario, la nuova situazione è quella rappresentata in figura.

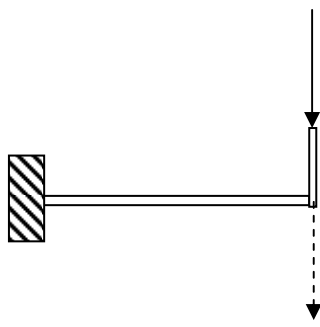
Scriviamo di nuovo le equazioni d'equilibrio, tenendo conto ovviamente della nuova configurazione della forza F e della coppia C . Si ha:

$$R_A + R_B - F = 0$$

$$R_B l - F \frac{l}{2} - C = R_B l - F \frac{l}{2} - F \left(\frac{l}{2} - a\right) = R_B l - Fa = 0$$

Le relazioni scritte coincidono con le equazioni precedenti e portano ovviamente allo stesso risultato per le equazioni vincolari.

Il regime statico di un sistema non è alterato se una o più delle forze esterne sono trasportate parallelamente a se stesse, aggiungendo una coppia di trasporto il cui momento è eguale alla somma dei prodotti del modulo delle forze per lo spostamento della linea d'azione in direzione perpendicolare a queste.



Trasporto lungo la linea d'azione.

Presentiamo un semplice esempio. Nella trave in figura lo scorrimento della forza lungo la sua linea d'applicazione non cambia il regime statico (non cambiano, infatti, le equazioni di equilibrio delle forze e dei momenti). E' però evidente che cambia l'effetto della forza sulla trave. Infatti, se la forza è applicata in basso, il tratto verticale della trave risulta scarico, mentre se la forza è in alto, esso risulta compresso. Possiamo quindi dire che:

Il regime statico di un sistema non cambia se una o più forze sono trasportate lungo la loro linea d'azione. Cambia invece l'effetto delle forze sul corpo, considerato come sistema deformabile.

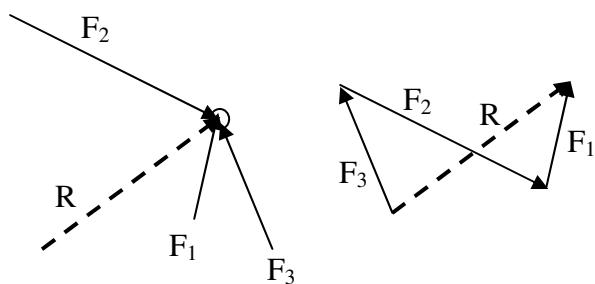
Determinazione delle risultanti e del momento risultante di un sistema di forze

In conformità a quanto è stato detto è evidente che:

Qualunque sistema di forze può essere trasformato con operazioni di trasporto come quelle viste in precedenza, senza alterare il regime statico. La composizione con operazioni di somma vettoriale delle forze agenti e dei momenti delle forze e coppie applicate rispetto ad un polo qualunque, porta a due entità risultanti, la forza risultante o semplicemente risultante, e il momento risultante rispetto al polo assunto. Queste entità risultanti sono, per quanto riguarda gli effetti sul corpo rigido a cui sono applicate, del tutto equivalenti al sistema di forze e coppie reale.

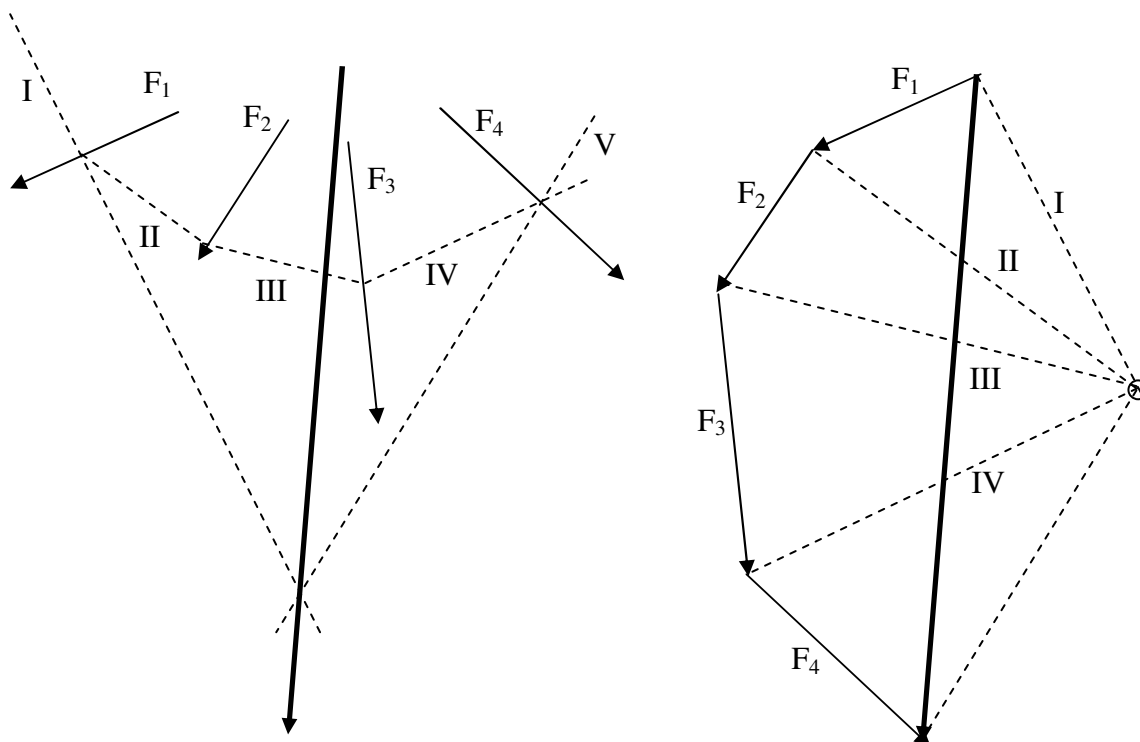
Determinazione della risultante

Le procedure per la determinazione della risultante sono diverse secondo la giacitura relativa delle forze, concorrenti ovvero aventi linee d'azione passanti per uno stesso punto, parallele o sghembe. Nel caso di più forze concorrenti, sia che giacciono in un piano o meno, è sufficiente sommare i vettori che rappresentano le forze stesse e applicare il vettore somma (risultante) nel punto intersezione delle linee d'azione. Il sistema di forze dato equivale in questo caso alla sua risultante.



Graficamente si può costruire il poligono delle forze trasportando tutti i vettori che le rappresentano uno di seguito all'altro e tracciando la congiungente il punto d'inizio col punto finale della costruzione. Nell'esempio seguente al punto materiale sono applicate tre forze e la risultante viene costruita come prima descritto. Se le forze sono parallele e le loro linee d'azione giacciono in un piano si vedano

i richiami forniti sui vettori all'inizio di questo testo. Nel caso di forze parallele o concorrenti con linee d'azione giacenti in un piano, graficamente si può ricorrere alla costruzione del *poligono funicolare*:



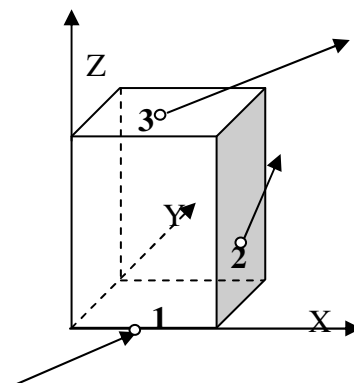
La costruzione consiste nel riportare tutte le forze parallelamente a se stesse per costruire il poligono delle forze, trovare la risultante unendo il vertice iniziale e quello finale, proiettare tutti i vertici da un polo arbitrario e riportare le proiettanti sino ad incontrare le rette d'azione delle forze omologhe. L'intersezione tra il primo e l'ultimo lato fornisce un punto della retta d'azione della risultante. Un sistema di forze distribuite nello spazio e sghembe in generale non può essere ricondotto ad un'unica forza risultante ma ad una risultante più una coppia risultante. come mostra l'esempio che segue:

Esempio:

Si considerino tre forze rappresentate dai vettori:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

applicate nei tre punti :



$$\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{Bmatrix}$$

La risultante delle tre forze è il vettore:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}$$

Se pensiamo di applicare il vettore risultante nell'origine dovremmo aggiungere una coppia il cui momento sia pari alla somma dei momenti delle tre forze rispetto all'origine, cioè:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{P}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{P}_3 \times \mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,3 \\ 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3,8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 3 \\ 5,8 \end{Bmatrix}$$

Il sistema originario è quindi equivalente ad una forza pari a \mathbf{R} , applicata nell'origine e ad una coppia il cui momento, considerato come vettore con direzione perpendicolare al piano della coppia, ha le componenti di \mathbf{M}_R

4.2 FORZE D'ATTRITO

4.2.1 Attrito radente

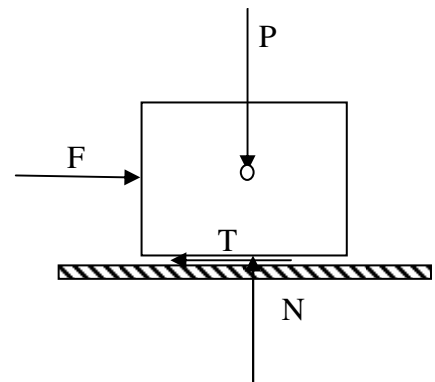
Questo tipo di forze si sviluppa quando due corpi entrano in contatto con strisciamento relativo. La presenza d'inevitabili asperità superficiali, misurabili attraverso il rilievo micrometrico delle superfici, fa nascere, nello strisciamento relativo tra le superfici a contatto, forze che dipendono dalla natura chimica dei materiali, dalla natura fisica (superfici secche o lubrificate) e dalla pressione normale esistente tra le superfici stesse. Secondo il modello di Coulomb, le forze tangenziali d'attrito sono, in modo approssimato, indipendenti dalla velocità dello strisciamento relativo. La forza tangenziale d'attrito è uguale alla componente normale, la forza cioè che preme i due corpi l'uno contro l'altro, moltiplicata per il coefficiente d'attrito tra le due superfici. Si ha cioè:

$$T = fN$$

Per quanto riguarda il coefficiente d'attrito, misure accurate hanno dimostrato che il coefficiente d'attrito di primo distacco, quello cioè che si manifesta quando inizia lo strisciamento relativo, è superiore al coefficiente d'attrito durante lo strisciamento. Per questo il coefficiente d'attrito di primo distacco viene in genere indicato con il simbolo f_a .

Le equazioni d'equilibrio sono

$$P - N = 0 \quad F - T = 0 \quad F \frac{h}{2} \neq 0$$

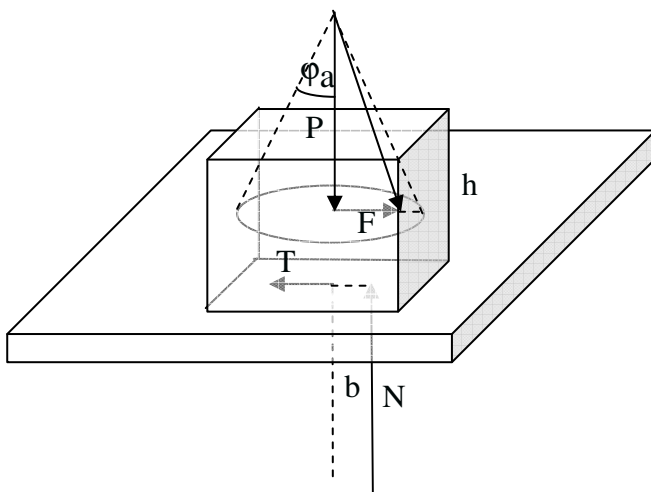


Se un blocco pesante poggia sopra una superficie piana e ad esso viene applicata una forza orizzontale F , l'esperienza dice che il corpo resta immobile finché il valore della forza non raggiunge un valore limite, che può essere pensato proporzionale al carico normale sull'area di contatto attraverso il coefficiente di primo distacco f_a . Una volta che il corpo inizia il movimento, per vincere le resistenze d'attrito e generare un moto uniforme, la forza necessaria è pari a $F = f N$

dove f prende il nome di coefficiente d'attrito, o coefficiente d'attrito dinamico, in contrapposizione a f_a , coefficiente d'attrito statico. Ammettendo che il blocco si muova con moto uniforme, la risultante e il momento risultante delle forze agenti su di esso dovranno essere nulle. Osservando le condizioni d'equilibrio del blocco durante il movimento si vede che, mentre queste sono soddisfatte in direzione orizzontale e verticale, cioè le componenti delle forze agenti in quelle direzioni hanno risultante nulla, non risulta soddisfatta la relazione di equilibrio dei momenti in quanto calcolando il momento risultante delle forze agenti rispetto al punto di applicazione della forza N , si trova che questo momento non è nullo. Si ammette allora (vedi figura) che la risultante delle pressioni normali di contatto tra il blocco e la superficie d'appoggio si sposti nella direzione del moto in modo tale da rendere il momento risultante delle forze agenti nullo.

$$P - N = 0 \quad F - T = 0 \quad F \frac{h}{2} - Nb = 0$$

Al momento in cui il moto ha inizio si ha $T = fN$. Poiché $F = T$ e $P = N$, perché il moto si instauri la forza orizzontale da applicare deve essere almeno pari a $f_a P$. In questo caso la risultante delle



forze F e P è inclinata sulla verticale dell'angolo d'aderenza φ_a tale che $f_a = \tan \varphi_a$. Quindi, perché il moto possa avere inizio, la risultante delle forze orizzontale e verticale applicate al blocco deve essere inclinata rispetto alla verticale almeno dell'angolo di aderenza. Se estendiamo la conclusione precedente a qualunque giacitura della forza F sul piano orizzontale, si ottiene la condizione che, perché il moto possa instaurarsi, la risultante delle forze orizzontale e verticale deve coincidere con una generatrice del cono d'aderenza o trovarsi al di fuori della superficie del cono stesso. Analogamente si

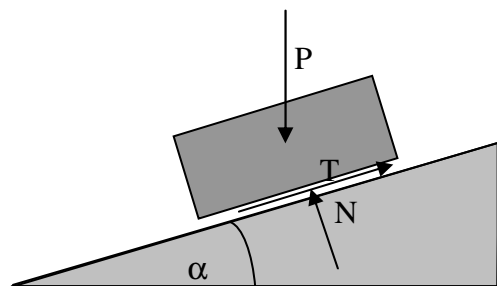
può definire il cono d'attrito, la cui semiapertura è eguale a $\varphi = \arctan f$. Durante il moto uniforme di strisciamento del blocco, la risultante delle forze agenti coincide con una generatrice del cono d'attrito.

Piano inclinato.

Si consideri un blocco su un piano inclinato e si voglia sapere per quale inclinazione ha inizio il moto e con quali modi questo s'instauri.

Perché possa iniziare lo scivolamento del blocco sul piano inclinato, si ha:

$$\begin{aligned} P \cos \alpha - N &= 0 \\ P \sin \alpha - T &= 0 \\ T &= f_a N \end{aligned}$$



Da cui $\tan \alpha = T/N = f_a$ cioè $\alpha = \varphi_a$

Si conclude cioè che, perché il moto possa instaurarsi, l'inclinazione del piano inclinato deve essere eguale o maggiore dell'angolo di aderenza. Questa proprietà suggerisce un metodo per la misura del coefficiente d'aderenza e d'attrito.

Esempio

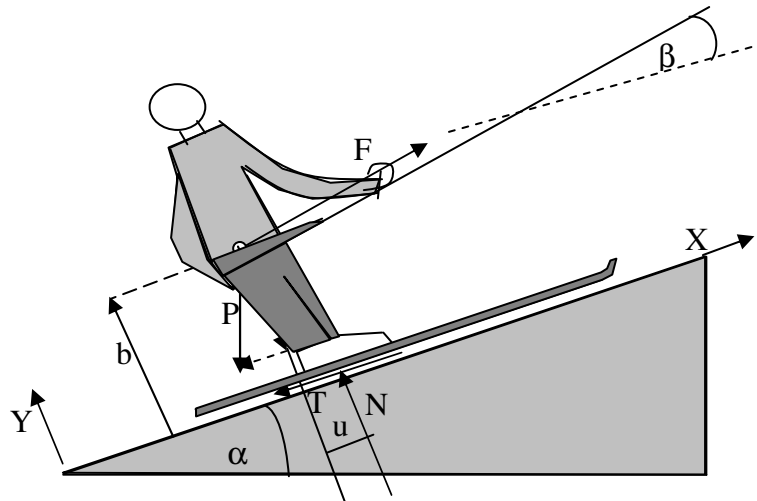
Lo sciatore nell'impianto di risalita è soggetto ad un sistema di forze equilibrato (si ammette che lo sciatore stia salendo a velocità costante sul pendio). Si scriveranno le equazioni di equilibrio alla traslazione nella direzione x del pendio e nella direzione y, a questo normale. L'equilibrio dei momenti sarà espresso rispetto al baricentro del corpo dello sciatore. Si ha:

$$F \cos \beta - T - P \sin \alpha = 0$$

$$N + F \sin \beta - P \cos \alpha = 0$$

$$Nu - Tb = 0$$

$$T = fN$$



Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite F,T,N,u. Con semplici passaggi si ottiene:

$$u = fb$$

$$F = \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta}$$

$$T = \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta} \cos \beta + P \sin \alpha$$

$$N = P \cos \alpha - \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta} \sin \beta$$

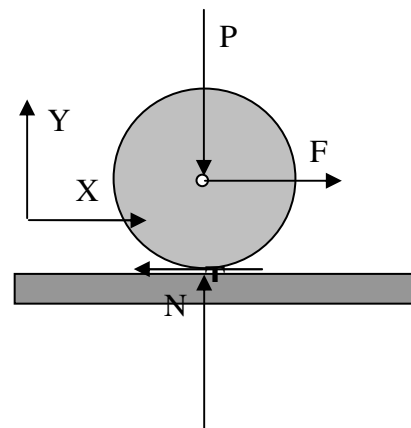
4.2.2 Attrito volvente

Se un disco rotola senza strisciare su un piano sotto l'azione di una forza orizzontale applicata nel suo centro, in condizioni di moto uniforme devono essere soddisfatte le equazioni d'equilibrio alla traslazione e alla rotazione. Le equazioni sono:

$$F - T = 0$$

$$N - P = 0$$

$$Tr = 0$$



La terza equazione di momento non può essere soddisfatta se non con T=0, cosa incompatibile con la prima equazione. Si assume quindi che la distribuzione di pressione sulla piccola area di contatto tra il disco e il piano d'appoggio sia asimmetrica e ammetta una risultante, spostata in avanti di u rispetto alla posizione geometrica del punto di contatto. Nella situazione della figura si ha allora:

$$F - T = 0$$

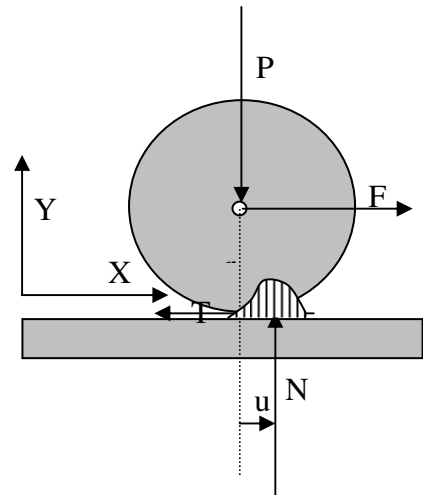
$$N - P = 0$$

$$Tr - Nu = 0$$

La forza T costituisce quindi una resistenza al rotolamento. La sua espressione:

$$T = \frac{u}{r} N = f_v N$$

Permette di definire la resistenza al rotolamento attraverso il coefficiente d'attrito volvente f_v , eguale al quoziente tra il parametro d'attrito volvente u e il raggio del disco.



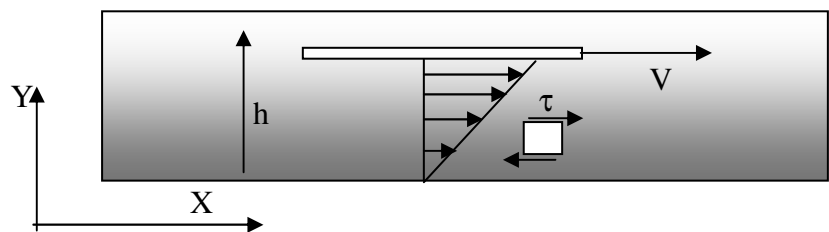
4.3 FORZE VISCOSE

Forze viscosi si manifestano quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso e tra strati contigui di un fluido. Esse danno luogo ad un sistema di sforzi tangenziali per i quali vale la legge:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

in cui μ è la viscosità dinamica del fluido, che nel sistema internazionale si misura in $\text{kg}/(\text{ms})$ e v la velocità delle particelle fluide. L'unità del sistema SI è però troppo grande per i valori di viscosità che si incontrano nella pratica tecnica. Per questo si impiega l'unità del sistema CGS $\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$ che è denominata Poise [P], o più spesso i suoi sottomultipli, cP e mP. Si consideri una piastra che scorre all'interno di un fluido contenuto in un condotto fermo.

Le particelle del fluido a contatto con la piastra mobile ne verranno trascinate per adesione e assumeranno la stessa velocità V di questa. Quelle a contatto col fondo del condotto resteranno ferme, perchè aderenti ad una parte immobile.



Una particella elementare del fluido sarà soggetta a forze tangenziali nel senso indicato. Se ammettiamo che il profilo di velocità del fluido sia lineare si ha:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} = \mu \frac{V}{h}$$

Lo sforzo τ , nell'ipotesi fatta, non dipende dalla coordinata y del punto considerato. La resistenza opposta dal fluido all'avanzamento si ottiene integrando, sulle due facce del corpo a contatto col fluido lo sforzo τ , ponendo cioè:

$$R = 2A\tau = \frac{2\mu AV}{h}$$

Nella pratica le unità di viscosità descritte sono impiegate raramente, lasciando il posto ad unità empiriche, ricavate da prove sperimentali di deflusso attraverso piccoli orifizi. Di questo tipo sono le indicazioni di viscosità che si trovano sulle confezioni degli olii lubrificanti.

4.3.1 Viscosità cinematica

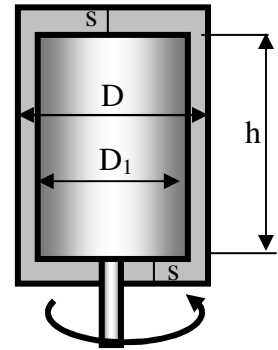
Si definisce viscosità cinematica il rapporto tra viscosità dinamica e densità $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ l'unità di viscosità cinematica nel sistema internazionale è

$$\frac{kg \ m^3}{ms \ kg} = \frac{m^2}{s}$$

anche per la viscosità cinematica l'unità del sistema SI è eccessiva per gli scopi pratici e si ricorre normalmente all'unità corrispondente del sistema

CGS, lo Stokes $\frac{cm^2}{s} = 10^{-4} \frac{m^2}{s}$ e ai suoi sottomultipli cS e mS. La

viscosità cinematica dell'acqua è 1 cS a 20 °C, quella dell'aria 13,2 cS, sempre a 20 °C, quella degli oli lubrificanti varia tra 50 e 200 cS. L'acqua non è quindi un buon lubrificante.



Esempio

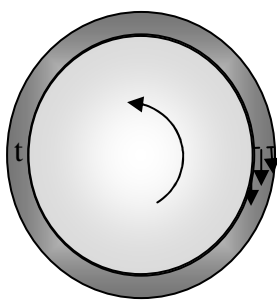
Si consideri un cilindro rotante con velocità angolare ω all'interno di un recipiente contenente un fluido viscoso. Si voglia determinare la coppia necessaria per far ruotare il cilindro con velocità costante. Poniamo il gioco laterale dato da $t = (D-D_1)/2$ e s quello sui due fondi. Per calcolare il momento da applicare all'asse del cilindro per vincere le resistenze viscose si pensi che sulla superficie cilindrica agiscono tensioni il cui valore è dato da :

$$\tau = \frac{\mu V}{t} \quad \text{con} \quad t = \frac{D-D_1}{2} \quad V = \frac{\omega D_1}{2}$$

per i fondi gli sforzi viscosi valgono:

$$\tau_1 = \frac{\mu v}{s} \quad \text{con} \quad v = \omega r$$

questi sforzi sono variabili con il raggio r . Integrando su tutta la superficie del rotore, fondi e superficie cilindrica, i momenti degli sforzi τ e τ_1 rispetto all'asse di rotazione si ottiene:



$$C = \mu \omega \frac{D_1}{2t} \frac{D_1}{2} \pi D_1 h + 2\mu \int_0^{D_1/2} \frac{\omega r}{s} 2\pi r * r dr = \mu \omega \pi \frac{D_1^3}{4t} h + 2\mu \omega \pi \frac{D_1^4}{64s}$$

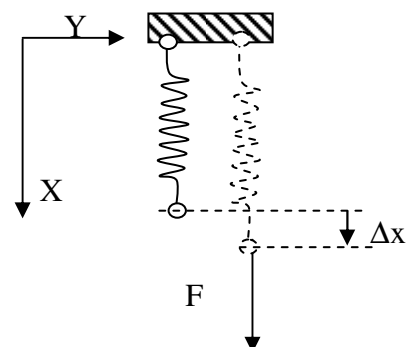
in cui sono evidenziati i contributi dei due fondi e del mantello cilindrico.

4.4 FORZE ELASTICHE.

Sono forze dovute alla presenza di elementi elastici di qualunque tipo. La molla è l'elemento elastico più semplice. Una molla a caratteristica lineare esercita, se deformata, una forza di reazione proporzionale alla deformazione.

$$F = k\Delta x$$

La costante k , che rappresenta il rapporto tra la forza applicata e l'allungamento della molla, prende il nome di rigidità. E' opportuno osservare che la morfologia dell'elemento elastico può



essere molto diversa da quella rappresentata convenzionalmente. La relazione tra forza ed allungamento per una molla lineare è rappresentata, in un diagramma Cartesiano, da un segmento rettilineo.

Due molle di rigidezza diversa, in parallelo, hanno al loro estremo lo stesso allungamento per cui si ha:

$$F = (k_1 + k_2)\Delta x \quad ; \quad K = k_1 + k_2$$

Due molle in parallelo hanno una rigidezza globale pari alla somma delle singole rigidezze. Due o più molle in serie hanno lo stesso valore di forza ai loro estremi, come si può vedere isolando una singola molla e applicando le relazioni di equilibrio: Risulta quindi:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{F}{K}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

In un sistema di molle in serie l'inverso della rigidezza del sistema complessivo, che prende il nome di cedevolezza o flessibilità, è eguale alla somma degli inversi delle cedevolezza delle singole molle.

4.4.1 Lavoro di deformazione

Se una molla a comportamento lineare viene deformata progressivamente, aumentando gradualmente la forza applicata sino ad arrivare ad un valore massimo F_0 , il diagramma forza-allungamento ha l'andamento della figura:

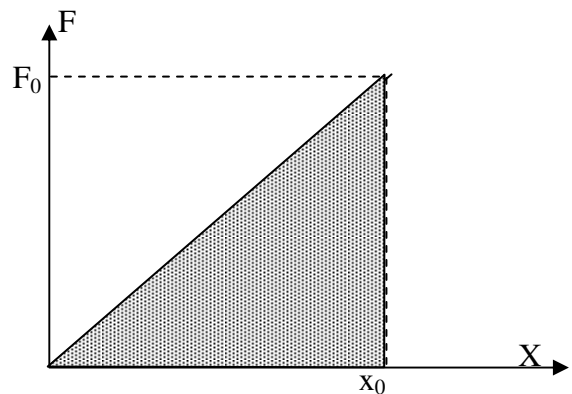
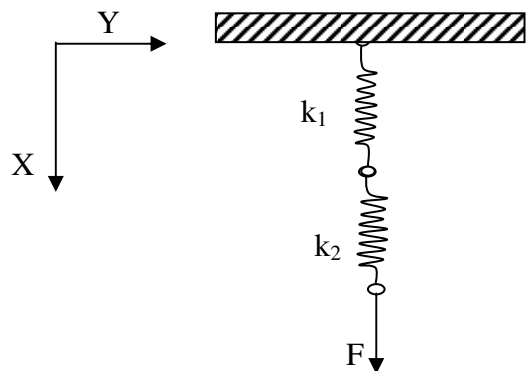
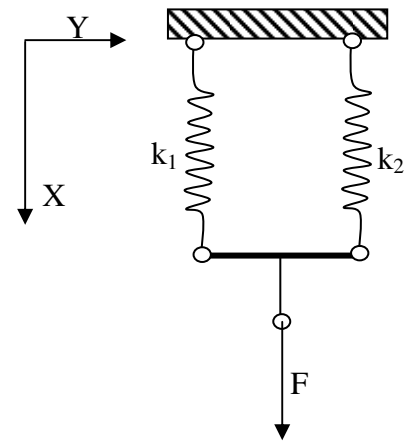
L'area sottostante alla caratteristica forze allungamenti rappresenta il lavoro speso dall'esterno per la deformazione della molla, se il senso di percorrenza della linea è verso le deformazioni crescenti, il lavoro elastico restituito dalla molla quando questa torna alla situazione di partenza, se la linea viene percorsa in discesa:

Si ha infatti:

$$L = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{1}{2} kx_0^2, \text{ che rappresenta proprio l'area del triangolo di base } x_0 \text{ e altezza } kx_0.$$

4.5 Elementi strutturali. Casi di sollecitazione.

Gli elementi elastici non hanno sempre la forma di molle, anche se rispondono elasticamente ai carichi applicati. Presenteremo tre casi di sollecitazione fondamentali:



Trazione:



I carichi assiali generano uno stato di trazione con tensioni $\sigma = F/A$ con F forza applicata (si tratta evidentemente di un sistema equilibrato di due forze F eguali) e A area della sezione. L'allungamento della trave è:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

in cui F è la forza applicata, l la lunghezza della trave, E il modulo elastico e A la sezione.

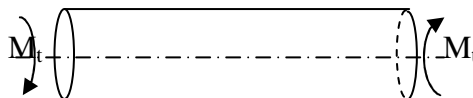
Nel caso di un elemento elastico in trazione la rigidità si definisce, come per una molla, come rapporto tra la forza applicata e l'allungamento, si ha quindi:

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$$

Torsione

Un elemento strutturale è sollecitato da un sistema di coppie di torsione equilibrate. In questo caso nella sezione nascono tensioni tangenziali, date dall'espressione:

$$\tau = \frac{M_t r}{J_p}$$



Nelle condizioni di sollecitazione viste sopra, è evidente che si avrà una rotazione relativa della sezione di destra rispetto a quella di sinistra. Questa rotazione vale:

$$\Delta \vartheta = \frac{M_t l}{GJ_p}$$

Nelle espressioni precedenti r è il raggio della sezione, G il modulo di elasticità tangenziale, legato al modulo E di elasticità normale e al coefficiente di contrazione trasversale dall'espressione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

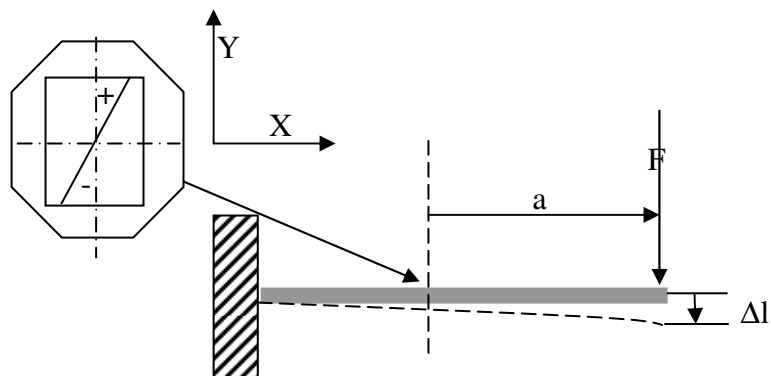
Negli elementi in torsione la rigidità si definisce come il rapporto tra il momento

torcente applicato e la rotazione relativa delle sezioni cioè:

$$k = \frac{M_t}{\Delta \vartheta} = \frac{GJ_p}{l}$$

Flessione

La figura illustra un caso tipico, non l'unico possibile, di trave in flessione, la trave a mensola. Nella sezione si sviluppano tensioni normali, di compressione nelle fibre superiori, di trazione in quelle inferiori. Il valore della massima sollecitazione di trazione o compressione è:



$$\sigma = \frac{My}{J}$$

dove M è il momento flettente nel punto considerato, pari al prodotto del modulo delle forze agenti da una parte della sezione per il braccio rispettivo, nel caso in esame $M=F \cdot a$. Y è la distanza del punto considerato dall'asse neutro, linea ideale che separa nella sezione la parte tesa da quella compressa. In figura è rappresentata la sezione della trave, sollecitata da tensioni di trazione nella parte superiore (indicate col segno +) di compressione nella parte inferiore. Nel caso della flessione la rigidezza si definisce come rapporto tra il carico applicato e la freccia Δl che vale all'estremità:

$$\Delta l = \frac{Fl^3}{3EJ} \quad \text{quindi si ha} \quad k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{3EJ}{l^3}$$

4.6 CORPI IN MOVIMENTO ENTRO UN FLUIDO.

Un corpo immerso in un fluido è soggetto ad azioni resistenti la cui entità è legata al tipo di moto. In generale l'entità delle forze resistenti dipende dal quadrato della velocità, secondo la relazione:

$$R = c_R \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

in cui c_R è il coefficiente di resistenza, v la velocità del corpo, A l'area della superficie frontale esposta dal corpo durante il moto. Il coefficiente di resistenza dipende in modo non lineare dal numero di Reynolds $Re = \rho v D / \mu$. A titolo di esempio si riportano alcuni esempi di andamento di C_R con il numero di Reynolds per corpi sferici e circolari, di forma cilindrica e piastre piane a pianta rettangolare. La resistenza R agisce in senso opposto al movimento, ma può non essere l'unica forza

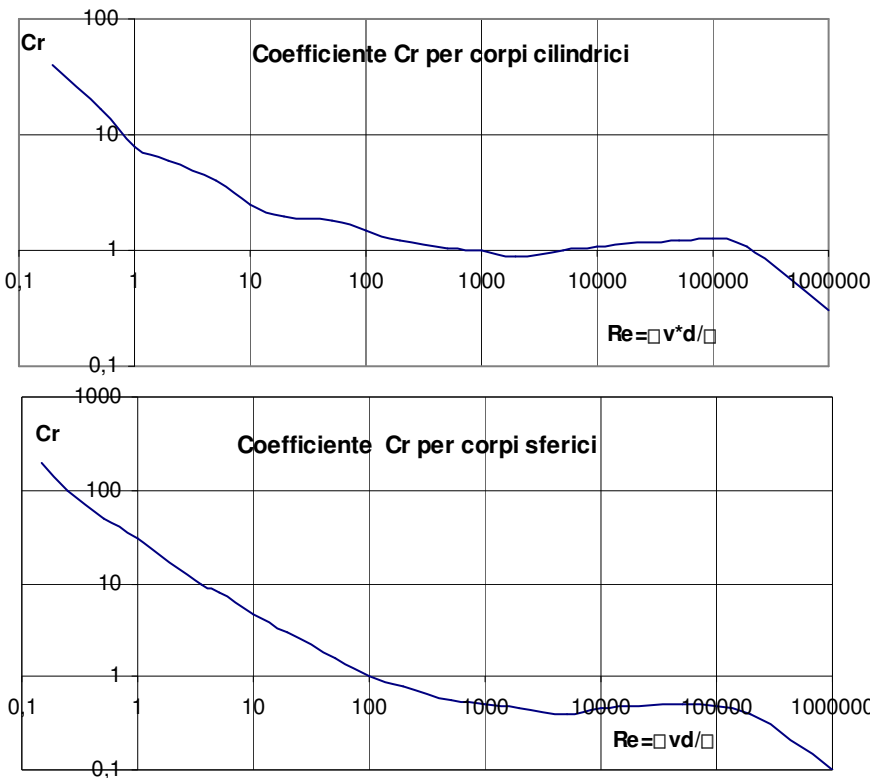
generata dall'interazione tra il corpo in movimento e il fluido. Nel caso dei profili aerodinamici, alla resistenza R si aggiunge la portanza P , una forza la cui direzione è normale a quella del moto.

L'espressione della portanza è analoga a quella della resistenza:

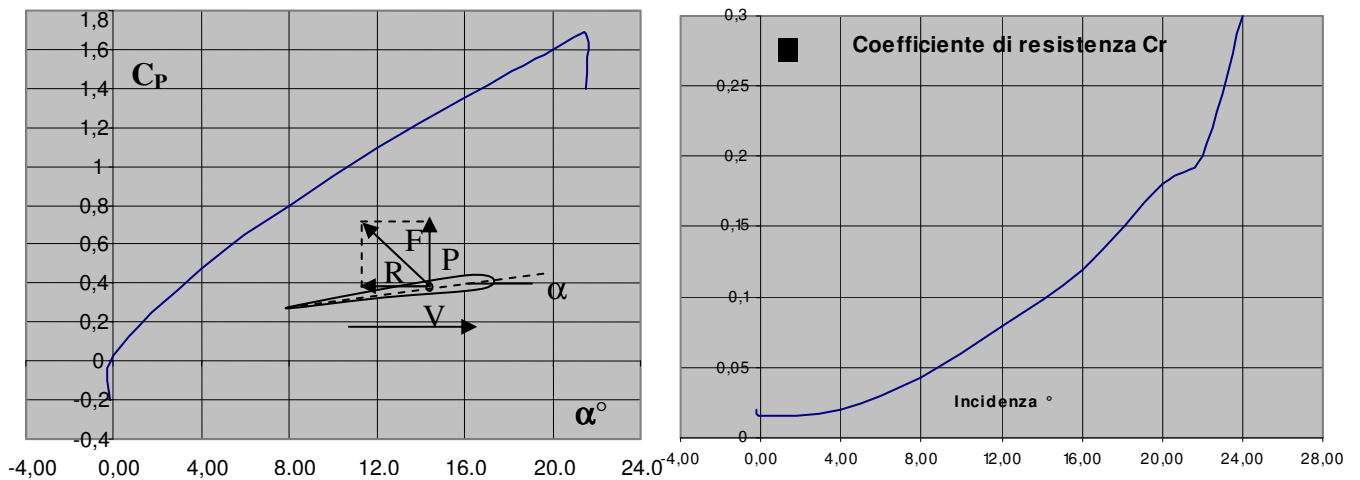
$$P = c_P \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

Il coefficiente di portanza c_P dipende, oltre che dalle caratteristiche del fluido, dall'angolo di incidenza, cioè l'angolo che la corda del profilo forma con la direzione del movimento.

Nella figura del diagramma di sinistra nella pagina seguente è rappresentato il



sistema di forze che agisce su un profilo aerodinamico in movimento con velocità V , all'interno di un fluido.



I diagrammi che seguono riportano i valori dei coefficienti di portanza e resistenza per un tipico profilo aerodinamico, in aria, in funzione dell'incidenza. E' ben noto che aumentando l'incidenza del profilo si ottiene un incremento della portanza e, più limitatamente, della resistenza. Tuttavia, oltre un certo limite di incidenza, si verifica il fenomeno dello stallo, che corrisponde al distacco dei filetti fluidi dalla superficie del profilo, con una brusca riduzione della portanza ed un forte incremento della resistenza.

Esempio

Si voglia calcolare la velocità di un paracadutista in caduta libera dopo il lancio. All'uscita dal velivolo il paracadutista possiede una velocità con direzione orizzontale, che è quella posseduta dall'aeroplano. Questa componente si annulla rapidamente dopo l'uscita dal velivolo, a causa della resistenza dell'aria. Senza occuparci di questa componente, si voglia studiare l'andamento della componente verticale. Quest'ultima cresce a causa del campo di gravità, sino a raggiungere un valore limite, nel quale la resistenza dell'aria equilibra il peso del paracadutista e questo si muove, con velocità costante, sino all'apertura del paracadute. Il calcolo richiede la valutazione del coefficiente di resistenza, dato in funzione del numero di Reynolds, il quale, a sua volta, dipende dalla velocità. Il calcolo non può quindi che essere svolto con una serie di iterazioni, partendo da un valore ipotizzato della velocità e verificandolo con il calcolo successivo. Per avere un primo ordine di grandezza si assumerà una velocità di 250 km/h, corrispondente a 70 m/s. Per questa velocità si

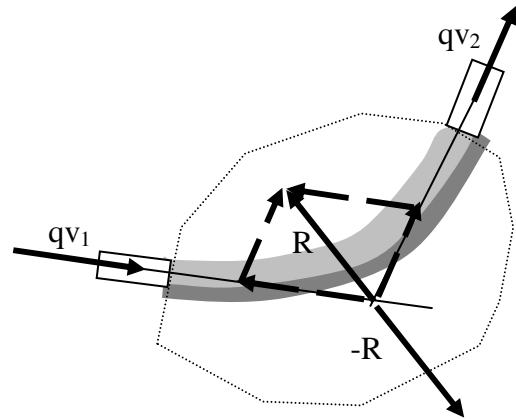
ha : $R_e = \frac{70 \cdot 1,8}{13,2 \cdot 10^{-6}} = 9 \cdot 10^6$ $c_R = 0,3$ valore stimato in prima approssimazione estrapolando il diagramma fornito in precedenza. Si ottiene allora:

$$R = \frac{0,3 \cdot 1,27 \cdot v^2 \cdot 1,8 \cdot 0,35}{2} = 70 \cdot 9,81 \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 9,81}{0,3 \cdot 1,27 \cdot 1,8 \cdot 0,35}} = 75,64 \frac{m}{s}$$

Nel calcolo precedente si è assunta una massa del paracadutista di 70 kg e una densità dell'aria di $1,27 \text{ kg/m}^3$. Il valore ottenuto è assai vicino a quello stimato. Naturalmente la velocità di caduta è fortemente dipendente dall'assetto e sarà minima quando il paracadutista offre all'aria il massimo della superficie frontale.

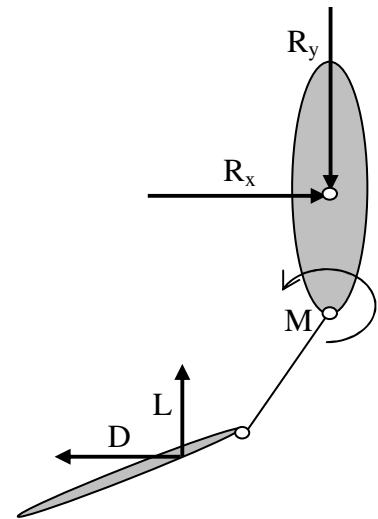
4.6.1 Forze di tipo fluidodinamico.

Quando un corpo entra in contatto con un fluido in moto, scambia con esso delle forze la cui entità può essere facilmente calcolata con i principi della dinamica. Queste forze sono presenti ad esempio nelle turbomacchine e, generalmente, in tutti i sistemi in cui un fluido evolve interagendo con corpi solidi. Prima di presentare la discussione su questo tipo di azioni, richiamiamo il secondo principio della dinamica secondo il quale la risultante delle forze agenti su un corpo è eguale alla derivata temporale della sua quantità di moto.



$$\sum F_i = Ma = M \frac{dv}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Supponiamo che il corpo rappresentato in figura, costituito da una lastra curva, sia investito da un getto fluido di portata q che entri nella sezione di ingresso con velocità v_1 ed esca con velocità v_2 . Se, nell'unità di tempo, la quantità di moto che entra nel volume di riferimento, delimitato dalla linea tratteggiata, vale qv_1 , e quella in uscita qv_2 , la variazione, nell'unità di tempo, della quantità di moto del fluido contenuto nel volume di riferimento vale $q^*(v_2 - v_1)$. Se quindi i due vettori disegnati nelle sezioni di ingresso e uscita del fluido hanno modulo proporzionale alle quantità di moto in ingresso e in uscita nell'unità di tempo, la loro differenza rappresenterà la risultante delle forze applicate dalla lastra curva alla porzione di fluido inclusa nel volume di riferimento, risultante mostrata in figura come somma della qv_2 con la $-qv_1$. Se invece, come di consueto, riveste maggiore interesse la risultante delle forze trasmesse dal fluido alla lastra, basta per questo cambiare di segno il vettore risultante R ottenuto. Nel procedimento esaminato non si è fatta una differenza tra quantità di moto, ma tra quantità di moto divise per un tempo unitario. Questo è possibile, ai fini della valutazione della derivata della quantità di moto, soltanto se il flusso che percorre il profilo della lastra è stazionario, tanto da poter identificare la derivata dQ/dt con qv , cioè con il prodotto della portata in massa per la velocità. Il procedimento adottato è valido qualunque sia la forma del corpo investito dal fluido, chiusa o aperta, a condizione che si sia appunto in presenza di un flusso stazionario. Il principio descritto è quello della propulsione a reazione, alla base non solo del funzionamento dei propulsori aerei, ma anche, per fare un esempio tratto dal mondo della natura, della propulsione dei pesci. Senza entrare in dettagli non adatti alla trattazione elementare svolta in questo testo, si può dire che nel suo nuoto il pesce non fa altro che inviare, ad ogni colpo di pinna, una quantità di moto all'indietro. Se consideriamo il pesce in acqua come un sistema immerso in un fluido, assumendo ancora un volume di riferimento che contiene il pesce si desume che la variazione della quantità di moto che entra nel volume di riferimento nell'unità di tempo deve corrispondere ad una spinta prodotta dall'acqua sul corpo del pesce.

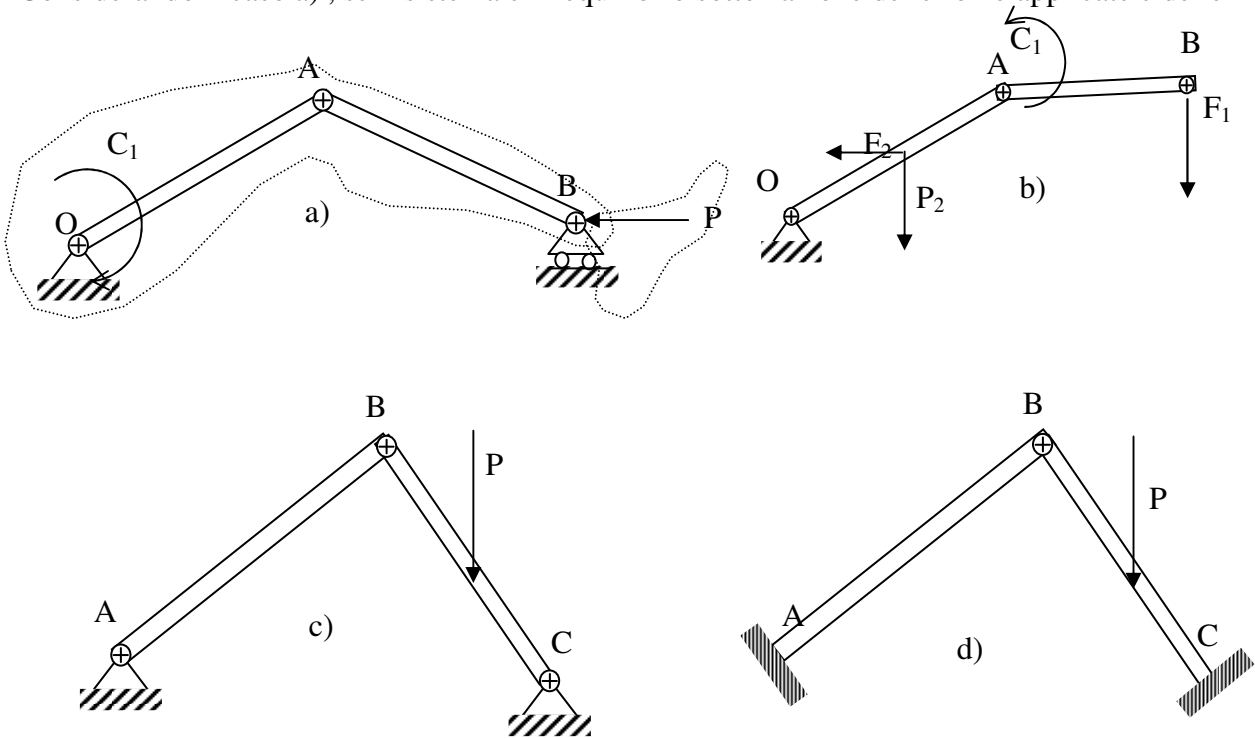


4.7 ELEMENTI DI STATICA

Un corpo, o un sistema di più corpi, in equilibrio, o in moto rettilineo uniforme, è soggetto ad un sistema di forze equilibrato, cioè con risultante e momento risultante rispetto a qualunque polo, nulli. Se così non fosse, per il secondo principio della dinamica, il corpo presenterebbe delle

accelerazioni lineari o angolari, contro l'ipotesi assunta. Per scrivere le condizioni di equilibrio del corpo è necessario prima isolare il corpo dall'ambiente esterno, sostituendo ai vincoli che legano il corpo agli altri corpi del sistema le opportune reazioni vincolari. Richiamando le nozioni di gradi di libertà di un sistema, già introdotte, si può definire il corpo isostatico se i vincoli presenti sono in numero strettamente sufficiente per cancellarne i gradi di libertà, labile se sono insufficienti, iperstatico se il numero dei gradi di libertà cancellati dai vincoli è superiore a quello del sistema. Se il sistema è isostatico sarà possibile, isolando i corpi che lo compongono, scrivere tante equazioni di equilibrio quante sono le componenti incognite di forza (incluse le reazioni vincolari) da determinare. Il processo di isolamento del corpo e scrittura delle equazioni di equilibrio può essere anche effettuato in casi semplici per via grafica e prende il nome di diagramma di corpo libero. Per i sistemi iperstatici occorrono condizioni aggiuntive che tengano conto della congruenza, cioè dello stato di deformazione del corpo e della compatibilità di questo stato con i vincoli. Si considerino i sistemi semplici della figura. E' abbastanza agevole vedere che il primo sistema è labile con un grado di libertà, il secondo è anch'esso labile con due gradi di libertà, il terzo isostatico, il quarto iperstatico.

Considerando il caso a) , se il sistema è in equilibrio sotto l'azione delle forze applicate e delle



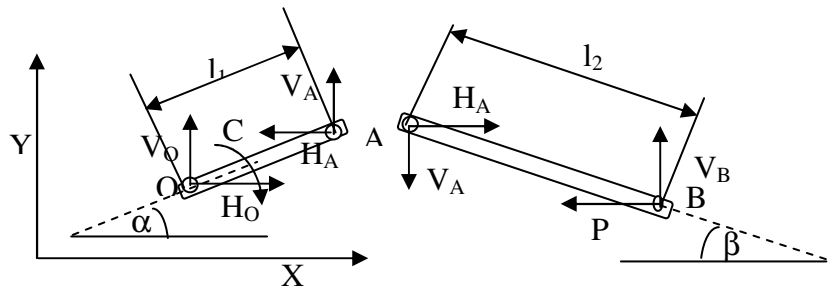
reazioni vincolari, se supponiamo che la forza P sia data, le componenti incognite da determinare sono la componente verticale della reazione in B le due componenti della reazione in A , le due componenti della reazione in O e il momento C_1 , complessivamente sei componenti di forza, numero eguale a quello delle equazioni disponibili. Se guardiamo al sistema come il modello di una gamba in cui viene applicata una forza P nella caviglia, supponendo che la caviglia sia vincolata a scorrere su una guida orizzontale, vediamo che la coppia C_1 è semplicemente la coppia risultante delle azioni muscolari sull'anca che contrasta il movimento della gamba. Per trattare il problema della determinazione delle componenti di forza e momento incogniti occorre:

- Eliminare i vincoli esterni ed interni, sostituendo a ciascuno di questi le due componenti orizzontale e verticale delle reazioni vincolari in O A e soltanto verticale in B . Questo sezionerà il sistema in due segmenti indipendenti.

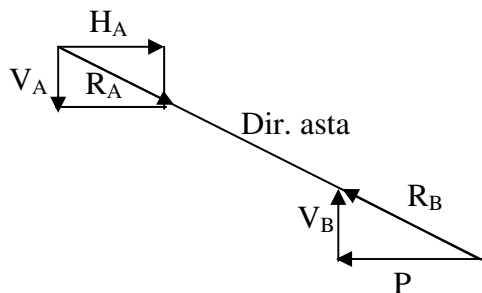
- Scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione per ciascuno dei corpi che compongono il sistema. Trattandosi di un sistema piano le equazioni per ciascun corpo saranno tre.

Nel caso in esame si scriveranno quindi sei equazioni che permetteranno di trovare facilmente le componenti incognite delle reazioni vincolari e il momento della coppia C_1 . La figura illustra il procedimento anche per via grafica. In effetti, nel caso di sistemi piani, per imporre la condizione di della risultante del sistema di forze che agisce sul corpo, si può costruire il poligono delle forze, riportando ciascuna delle forze agenti, parallelamente a se stessa, per formare un poligono che, per l'equilibrio, deve essere chiuso.

Sempre con riferimento al caso a) si può considerare l'equilibrio, nonostante i vincoli siano insufficienti per garantirlo, se si ammette che il sistema delle forze esterne e delle reazioni vincolari abbia risultante e momento risultante nulli. Le incognite sono 6, essendo la forza



P nota, $H_0, V_0, H_A, V_A, V_B, C$. Le equazioni sono sei, tre per ciascuna delle aste. Si ha quindi:



$$\begin{aligned}
 H_0 - H_A &= 0 \\
 V_0 + V_A &= 0 \\
 H_A l_1 \sin \alpha + V_A l_1 \cos \alpha - C &= 0 \\
 H_A - P &= 0 \\
 V_B - V_A &= 0 \\
 V_A l_2 \cos \beta - H_A l_2 \sin \beta &= 0
 \end{aligned}$$

Le equazioni precedenti permettono di ricavare le reazioni incognite in modo assai facile e diretto. Se si vuole operare graficamente e intuitivamente, si può osservare che, nella seconda asta la risultante delle forze P e V_B , come pure quella delle H_A V_A , devono essere dirette nella direzione della linea d'asse dell'asta. In modo del tutto analogo si opera per l'altra asta. La soluzione grafica è in genere molto rapida, e si presta bene per problemi piani, o a questi riconducibili. È interessante osservare che, quando esista la soluzione analitica, è possibile trovare la soluzione anche per via grafica. Naturalmente bisogna essere disposti a pagare un certo prezzo in termini di approssimazione dei risultati, a fronte di un vantaggio in termini di rapidità della procedura. Spesso la soluzione grafica viene trovata come prima soluzione approssimata, prima di procedere al calcolo analitico.

Vincoli interni. In un sistema costituito da più segmenti esisteranno in genere vincoli che legano il sistema all'ambiente esterno, considerato stazionario ed immobile e vincoli che connettono segmenti diversi, ambedue mobili. Per il terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione) le componenti di forza trasmesse dal primo elemento al secondo sono eguali e opposte in verso alle componenti trasmesse dal secondo al primo elemento. Per ogni vincolo interno, in un problema piano sono presenti al massimo tre incognite.

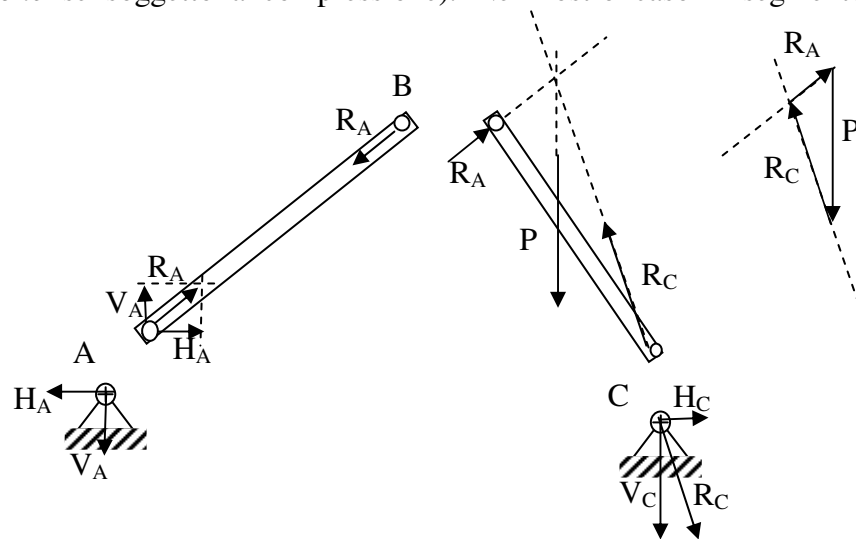
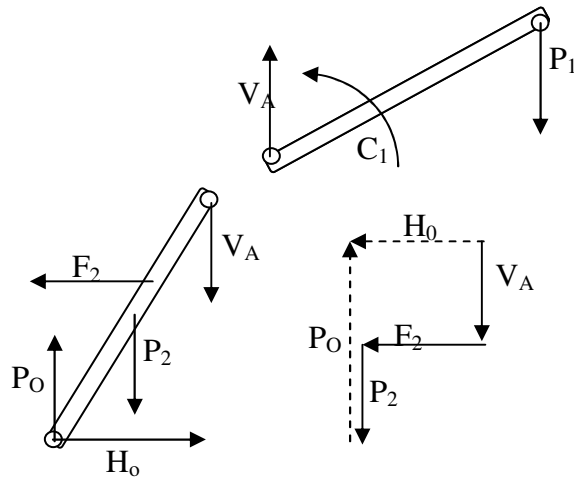
Problema b) Si può procedere scrivendo le equazioni di equilibrio, come si è appena visto, oppure osservando che la reazione nella cerniera A deve essere verticale ed eguale in modulo a P_1 , quindi si può procedere alla costruzione del poligono delle forze per la seconda asta, come indicato in figura.

La costruzione inizia con le componenti note, sino a tracciare un segmento verticale indefinito che segna la direzione di P_0 . Ripartendo quindi dall'origine di V_A si traccia una linea orizzontale (direzione di H_0) sino ad incontrare la verticale prima tracciata. L'intersezione delle due linee determina il modulo delle due componenti incognite, P_0, H_0 .

Problema c.

Si tratta della struttura isostatica conosciuta arco a tre cerniere. Si procede in modo identico al problema a), con l'avvertenza che le incognite sono le 6 componenti di reazione in A,B,C. Come si è osservato in precedenza, se un segmento non sopporta forze normali al suo asse od oblique, esso può trasmettere soltanto forze assiali (nell'ingegneria strutturale prende il nome di *tirante* se soggetto a trazione, *puntone* se soggetto a compressione).

Nel nostro caso il segmento AB trasmette forze soltanto nella direzione del suo asse. La reazione in A ha quindi la direzione del segmento AB. Si può anche osservare che il segmento BC è soggetto a tre forze, la reazione trasmessagli da AB, quella in C e la forza esterna P. Perché tre forze complanari possano farsi equilibrio, cioè avere risultante nulla, occorre che le loro rette d'azione si incontrino in un punto. Questa condizione può essere utilizzata per tracciare il poligono delle forze agenti sul segmento BC.



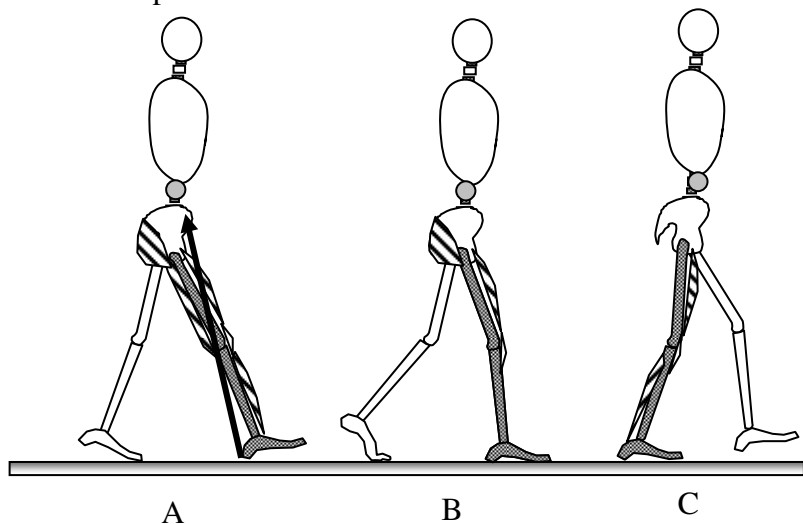
La reazione in A ha quindi la direzione del segmento AB. Si può anche osservare che il segmento BC è soggetto a tre forze, la reazione trasmessagli da AB, quella in C e la forza esterna P. Perché tre forze complanari possano farsi equilibrio, cioè avere risultante nulla, occorre che le loro rette

d'azione si incontrino in un punto. Questa condizione può essere utilizzata per tracciare il poligono delle forze agenti sul segmento BC.

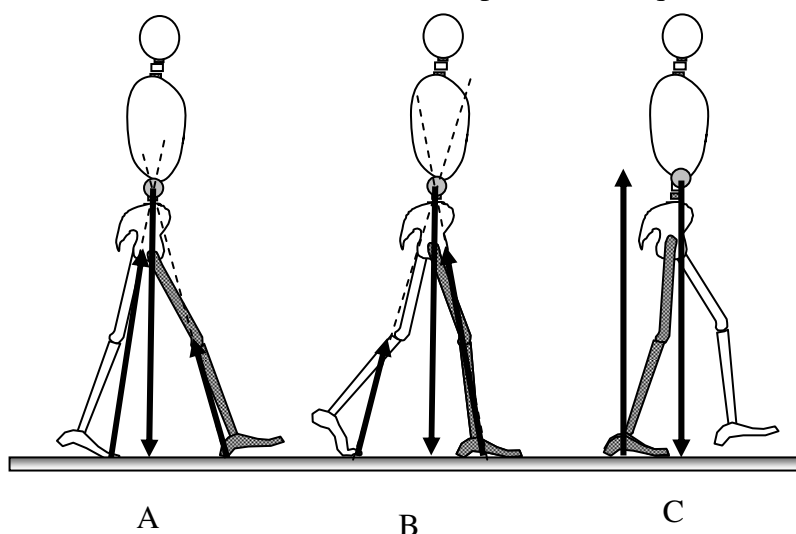
Problema d) Si tratta di un problema iperstatico, non risolubile con i metodi appena trattati, in quanto le equazioni a disposizione sono in numero insufficiente per determinare le incognite corrispondenti alle reazioni vincolari. Problemi di questo tipo possono essere risolti quando si introducano relazioni supplementari che mettano in gioco la deformabilità della struttura.

Forze agenti sull'arto inferiore durante il cammino.

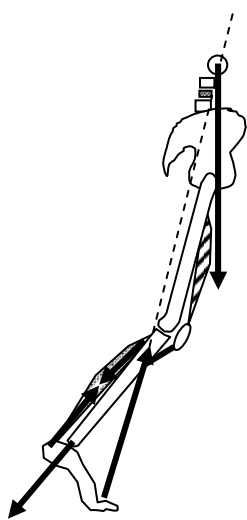
Riprendiamo l'analisi del cammino per svolgere alcune considerazioni sulle forze scambiate tra il piede e il terreno su cui poggia, forze trasmesse, attraverso la catena cinematica a tre segmenti della gamba, sino all'articolazione dell'anca. Nella figura a fianco sono schematicamente rappresentate tre fasi del cammino per mettere in evidenza i muscoli attivati durante il ciclo della deambulazione. Come di consueto si è fatto riferimento ad una sola gamba, rappresentata in grigio nel disegno. Le considerazioni che faremo valgono comunque per ambedue gli arti inferiori. Nella posizione A si ha l'impatto col terreno del piede avanzato. Poichè il contatto avviene sul tallone il piede tenderebbe a compiere una flessione plantare che viene impedita dal muscolo tibiale anteriore. La linea d'azione della forza di contatto passa in prossimità dell'articolazione del ginocchio. Se passa anteriormente il suo effetto è quello di estendere l'articolazione, se passa posteriormente lo flette. Il controllo dell'articolazione del ginocchio viene quindi compiuto congiuntamente dal semitendinoso e semimembranoso e dal quadricipite femorale. La stessa forza di contatto provocherebbe una flessione dell'anca che viene contrastata dal gluteo. I muscoli attivi sono evidenziati nella figura A. Nella figura B l'appoggio sta per trasferirsi completamente sul piede anteriore. Il ginocchio è leggermente inflesso. Il quadricipite è attivo per contrastare la flessione del ginocchio. Il gluteo è attivo per contrastare la flessione dell'anca. La tibia è in posizione prossima alla verticale, la risultante delle azioni del terreno passa per il centro della caviglia. Non sono necessarie azioni rilevanti di controllo da parte del tibiale anteriore o del gastrocnemio. Nella posizione C la principale azione muscolare è volta al sollevamento del tallone. Quest'azione viene compiuta per effetto della contrazione del gastrocnemio e del soleo. La risultante delle forze di contatto passa sulla parte anteriore della pianta. Il piede è dorsiflesso. Le posizioni che abbiamo illustrato sono semplicemente tre esempi che racchiudono una serie di posizioni intermedie.



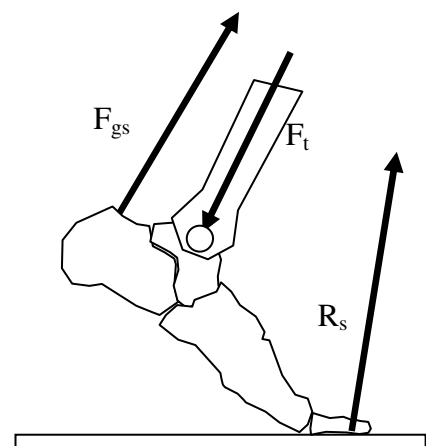
Nella deambulazione esistono due tipi di forze, quelle che producono il movimento in avanti, tipicamente le componenti orizzontali delle forze scambiate tra il piede e il terreno, e quelle che equilibrano il peso del corpo. Se osserviamo le figure del modello 2D della deambulazione già proposto nel capitolo sulla cinematica possiamo osservare che le forze esterne agenti sono quelle che il corpo scambia col terreno in corrispondenza dei piedi, la forza peso, applicata nel baricentro ed eventuali altre forze dovute ad altre cause (una di queste potrebbe ad esempio essere l'azione del vento). Limitandoci



alle azioni menzionate sappiamo che la forza peso è applicata nel baricentro del corpo posto anteriormente alla seconda vertebra lombare. Le azioni applicate dal terreno, o meglio le risultanti delle pressioni di contatto sui piedi devono equilibrare in una posa statica la forza peso. Questa condizione permette di definire staticamente le reazioni sul terreno. In particolare si può dire che quanto più la verticale tracciata dal baricentro cade vicina al piede avanzato, tanto più sarà alta la reazione in corrispondenza di questo piede. Le figure A,B,C mostrano diverse situazioni presenti nel ciclo del cammino. Nella figura A la linea d'azione della forza peso è più vicina al piede arretrato. La reazione del terreno in corrispondenza di questo è quindi più elevata. In B la reazione sul piede avanzato è più elevata. Essa diventerà pari al peso del corpo in corrispondenza della situazione C. E' opportuno notare che le situazioni descritte sono estremamente semplificate rispetto alla realtà. Infatti le reazioni in corrispondenza dei due piedi non agiscono sullo stesso piano e la riduzione del modello a unacatena cinematica piana è una drastica semplificazione della realtà. Malgrado questo il modello si presta per avere un'idea della variazione delle reazioni durante la deambulazione. L'ultima situazione non può essere definita stabile, infatti non può esserci equilibrio se due forze non hanno lo stesso modulo, la stessa linea d'azione e verso opposto. L'insieme delle due forze, peso e reazione, provoca una rotazione del corpo in avanti intorno al piede a contatto col terreno. Questa rotazione viene arrestata bruscamente dal contatto del piede avanzato col terreno. Le figure precedenti lasciano intravedere il meccanismo fondamentale della propulsione. L'avanzamento del baricentro ottenuto mediante una flessione del tronco è accompagnato dal sollevamento del piede arretrato e dalla flessione del dell'articolazione metatarso-falangea. Quando la linea d'azione della forza peso del corpo interseca il terreno in un punto avanzato rispetto al piede anteriore si genera una coppia il cui momento fa ruotare il corpo in senso orario intorno al punto di

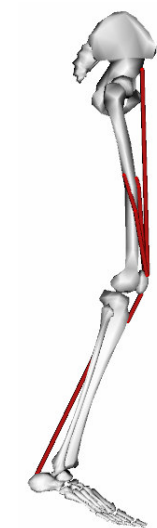
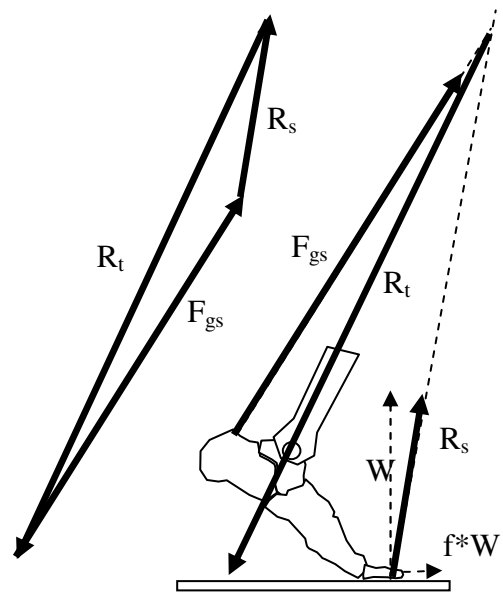


contatto tra piede e terreno. La figura illustra le forze che agiscono sul piede in questa situazione. Nella figura a destra si osserva che la forza esercitata sul calcagno dalla contrazione del gastrocnemio deve avere, per l'equilibrio alla rotazione del piede intorno alla caviglia, un modulo maggiore della reazione di appoggio sul terreno a causa della disparità dei bracci. Nella situazione C il piede arretrato sopporta tutto il peso del corpo. Per la maggior parte di questa fase il piede è a contatto col terreno su larga parte della pianta e del calcagno. Poco prima che il piede controlaterale venga a contatto il piede si solleva lasciando a contatto soltanto l'area sotto le falangi (inizio della fase A). Questo è il momento in cui sul piede sono

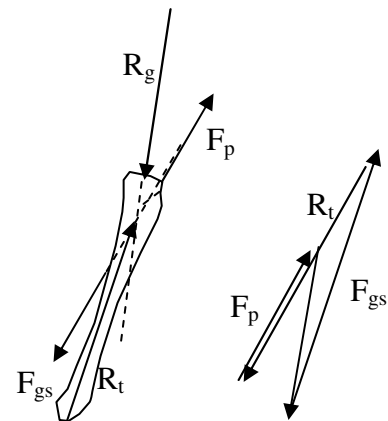


presenti le massime pressioni di contatto. Prima di passare ad un'analisi più dettagliata delle forze agenti sui vari segmenti dell'arto inferiore, osserviamo che le forze muscolari, quando esercitate da un muscolo con asse rettilineo, teso tra due punti di attacco sulla struttura ossea, sono sempre forze mutue, cioè eguali a

due a due, come si può vedere nella figura per quanto riguarda il gastrocnemio. Se quindi dobbiamo scrivere le relazioni di equilibrio statico del piede, dobbiamo liberarlo dalle relazioni vincolari che il piede ha con i segmenti contigui e col suolo. Nell'ultima fase di contatto il piede tocca il terreno soltanto sulle falangi. La risultante delle azioni di contatto ha due componenti, quella verticale eguale al peso del corpo se il piede a contatto è uno solo, e quella orizzontale che ha il ruolo di spinta propulsiva. Non si può determinare a priori con ragionamenti teorici la linea d'azione della forza R_s . Essa può essere determinata sperimentalmente mediante una piattaforma dinamometrica. La forza F_{gs} non è invece conosciuta in modulo ma lo è in direzione in quanto la sua direzione è quella della congiungente i due attacchi del gastrocnemio (o meglio la direzione media del gastrocnemio e del soleo). La forza scambiata sull'articolazione della caviglia non è conosciuta ne in modulo ne in direzione. Se, a titolo di pura speculazione, immaginiamo che la componente orizzontale della forza F_s sia pari al prodotto del coefficiente d'attrito tra piede e terreno (o tra scarpa e terreno) per la componente normale, della reazione, eguale, come si è detto, al peso del corpo, si ottiene una valutazione di questa forza in modulo direzione e verso. In questo caso sarà possibile costruire il poligono delle tre forze, come mostrato in figura. La costruzione mostra come la forza diretta secondo l'asse della tibia risulta circa tre volte il peso del corpo e la forza muscolare del complesso soleo-gastrocnemio è pari ad oltre due volte il peso del corpo W . Ricordiamo ancora che perchè tre forze si facciano equilibrio le loro rette d'azione si devono necessariamente incontrare in un punto. Omettiamo per brevità la valutazione analitica delle tre forze ottenute con la costruzione grafica in figura, perchè la procedura è quella più volte applicata. Per l'equilibrio del complesso tibia-perone, considerato per semplicità come un'unica asta si ragiona nel modo seguente. L'asta viene considerata separata nelle articolazioni del ginocchio e della caviglia sostituendo a queste le rispettive reazioni vincolari, ricordando che la reazione nella caviglia è stata determinata con la costruzione grafica appena illustrata. Lo schema statico del complesso tibia-perone è quello delle figure a fianco. Anche in questo caso lo schema riportato è frutto di un'estrema semplificazione ed ha un valore solo esemplificativo per quanto riguarda i metodi di calcolo di valori di massima delle forze muscolari e delle reazioni nelle articolazioni. Lo schema a sinistra riporta l'arto inferiori

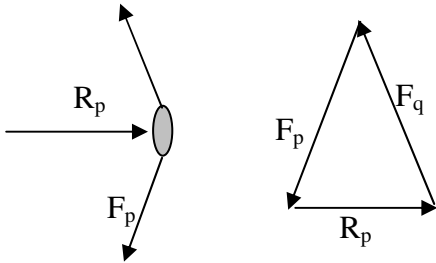


tre forze ottenute con la costruzione grafica in figura, perchè la procedura è quella più volte applicata. Per l'equilibrio del complesso tibia-perone, considerato per semplicità come un'unica asta si ragiona nel modo seguente. L'asta viene considerata separata nelle articolazioni del ginocchio e della caviglia sostituendo a queste le rispettive reazioni vincolari, ricordando che la reazione nella caviglia è stata determinata con la costruzione grafica appena illustrata. Lo schema statico del complesso tibia-perone è quello delle figure a fianco. Anche in questo caso lo schema riportato è frutto di un'estrema semplificazione ed ha un valore

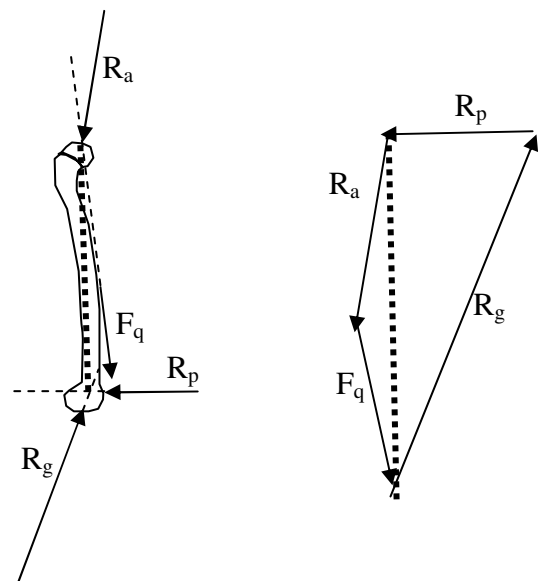


solo esemplificativo per quanto riguarda i metodi di calcolo di valori di massima delle forze muscolari e delle reazioni nelle articolazioni. Lo schema a sinistra riporta l'arto inferiori

con soltanto alcuni dei muscoli coinvolti in questa fase del cammino, in particolare il soleo i cui attaches sono nella superficie posteriore della tibia e nel calcagno, ed il quadricipite che converge nel tendine patellare da una parte, mentre dall'altra si separa nei quattro muscoli, vasto, intermedio, laterale, mediale e retto femorale. Nelle figure precedenti è stato chiamata R_g la reazione nell'articolazione del ginocchio, F_p la forza nel tendine patellare, R_t la reazione nell'articolazione tibio-tarsica (caviglia), F_{gs} la forza dovuta all'azione combinata del soleo e del gastrocnemio. Nello schema presentato si è assunto che la forza dovuta alla contrazione di questi muscoli sia applicata da una parte al calcagno, come nella realtà, dall'altra sulla tibia, mentre in realtà sulla tibia si trova soltanto la terminazione del soleo. Il gastrocnemio ha i suoi capi in corrispondenza del condilo femorale. Si tratta di un muscolo che supera ben due articolazioni, quella del ginocchio e quella tibio-tarsica. Per terminare l'analisi occorre valutare le azioni



nella patella considerata come segmento indipendente in equilibrio. Le azioni sono quella del tendine patellare, valutata in precedenza F_p , la reazione del condilo femorale R_p di cui è nota solo la direzione, la forza esercitata dal quadricipite F_q di cui è nota la direzione. Anche in questo caso si è semplificato assumendo che l'altro capo del quadricipite sia connesso alla diafisi femorale, cosa non esatta in quanto uno dei capi del quadricipite si connette alla pelvi. Il diagramma di corpo libero non richiede illustrazioni. Anche in questo caso si omette per brevità la scrittura delle equazioni analitiche corrispondenti. Per concludere l'analisi dell'arto inferiore nel caso esaminato, quello di attivazione dei soli muscoli quadricipite e soleo durante la deambulazione, esaminiamo la situazione del femore rappresentato schematicamente nella figura.



Le azioni presenti sono quelle del quadricipite F_q , con l'eccezione del retto femorale che è collegato alla pelvi, la reazione sull'articolazione coxo-femorale (testa del femore-acetabolo) R_a , la reazione sul ginocchio R_g , calcolata in precedenza, la reazione patellare R_p . Anche in questo caso occorre tener presente che le forze e reazioni reali non giacciono su un unico piano, che i muscoli hanno terminazioni multiple e non si collegano alle ossa in un punto unico e che sono state trascurate azioni muscolari (ad esempio quelle della fascia ilio tibiale) che certamente influenzerebbero l'analisi presentata. L'analisi ha quindi l'unico scopo di mettere in luce i metodi vettoriali ed analitici per la determinazione degli ordini di grandezza delle azioni muscolari e delle reazioni in corrispondenza delle articolazioni. Quando il sistema è isostatico o labile ma soggetto ad un sistema di forze con risultante e momento risultante nulli è possibile analizzare il sistema elemento per elemento, partendo dal punto in cui le forze applicate sono conosciute o misurabili (in questo caso il punto d'appoggio del piede sul terreno) e risalendo sino alla fine della catena cinematica. Analisi più complesse che tengano conto della complessità e della molteplicità delle forze muscolari possono essere svolte mediante sistemi di modellazione meccanica che rappresentino in modo accurato le strutture ossee e quelle muscolari, e compiano analisi statiche cinematiche e dinamiche partendo dagli stessi principi generali di equilibrio statico che abbiamo presentato e di equilibrio dinamico che presenteremo nel seguito.

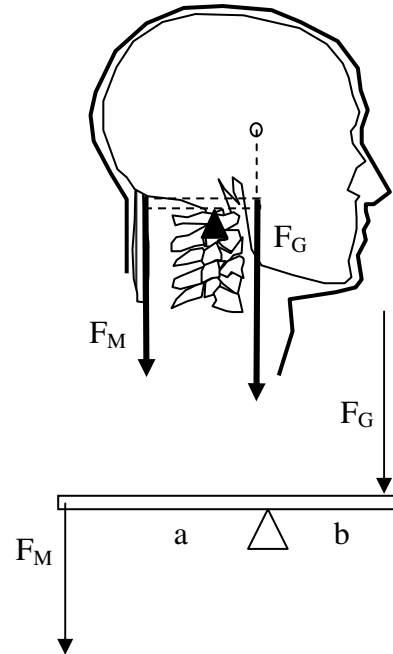
Equilibrio del capo.

La figura mostra una condizione d'equilibrio del capo. Il vincolo è costituito dall'articolazione della prima vertebra cervicale (atlante), i carichi sono il peso della testa, applicato nel baricentro della stessa, e la forza complessiva dei muscoli estensori del collo. Dal punto di vista dell'equilibrio delle forze possiamo schematizzare la testa come una leva di primo grado, con la potenza all'estremità destra, la resistenza a quella sinistra, e il fulcro in posizione intermedia. Il braccio della forza muscolare è maggiore di quello del peso del capo e' appena necessario richiamare l'attenzione sul fatto che la struttura è labile, vale a dire dotata di un grado di libertà. Per questo motivo è necessario per l'equilibrio che il momento della forza muscolare e quello del peso siano eguali in ogni istante. Questa eguaglianza è ottenuta con reazioni muscolari, del tutto inconse, che intervengono continuamente per esercitare il controllo della posizione della testa. La reazione vincolare in corrispondenza del vincolo vale

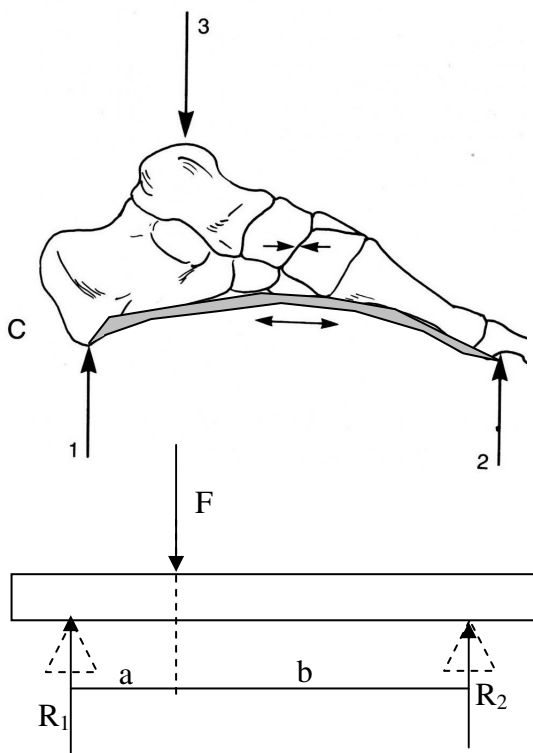
$$P + F_m = P\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

E' evidente che quindi il carico sulla

vertebra non è molto lontano da 1,5 volte il peso del capo. Questo ragionamento riguarda naturalmente le sole azioni statiche, potendo le azioni dinamiche arrivare a raggiungere livelli anche 10 volte superiori. Le azioni di cui abbiamo mostrato il metodo di calcolo, variano fortemente nel caso in cui la testa non sia in posizione verticale ma il corpo sia piegato. In questo caso la forza peso cambia direzione e la forza muscolare cambia valore. Lasciamo la considerazione d'altre posizioni della testa ai trattati specialistici.



Equilibrio del piede.

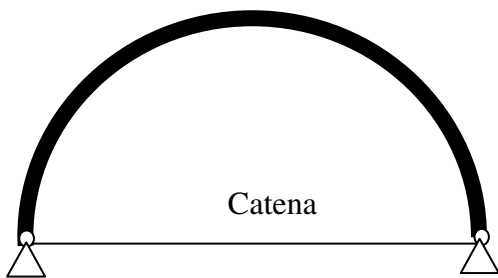


In figura possiamo osservare il piede appoggiato al suolo e caricato in corrispondenza dell'articolazione con la tibia. Anche in questo caso, se consideriamo il piede come un corpo indeformabile, possiamo unicamente preoccuparci di scrivere il suo diagramma di corpo libero, cioè definire la coppia di reazioni vincolari che fanno equilibrio al carico dato. Lo schema statico, in questo caso, è quello di una trave appoggiata in due punti e soggetta ad un carico verticale. Nella figura abbiamo tratteggiato i vincoli per mostrare come questi siano stati sostituiti dalle corrispondenti reazioni vincolari. Il calcolo delle reazioni nel calcagno e nella pianta del piede è del tutto agevole:

$$R_1 = \frac{Fb}{a+b} \quad R_2 = \frac{Fa}{a+b} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{b}{a}$$

La reazione in corrispondenza del calcagno è notevolmente più elevata di quella sulla pianta. Questo dipende dalla morfologia del piede, essendo la linea d'azione del carico più vicina al

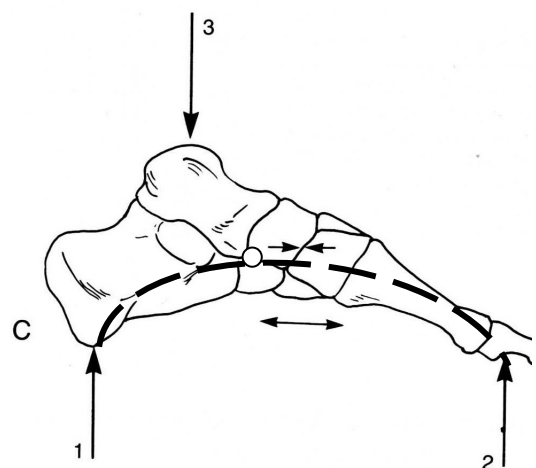
calcagno. Il piede è sollecitato a flessione con sforzi interni di compressione nella parte superiore e di trazione in quell'inferiore. Poiché la struttura del piede non è monolitica, essendo questo costituito da una catena di ossa, risulta che le ossa situate nella parte superiore tendono a chiudere il



gioco nella zona di separazione, tendono ad aprirlo, invece, nella parte inferiore. Alla resistenza dell'arco plantare contribuisce la fascia muscolare plantare che agisce in modo analogo ad una "catena" negli archi strutturali di cui la figura mostra un esempio. Il fatto di assumere forze concentrate in corrispondenza del calcagno e della pianta è, com'è evidente, una notevole semplificazione. Le due forze di reazione non sono altro nella realtà, che le risultanti di un

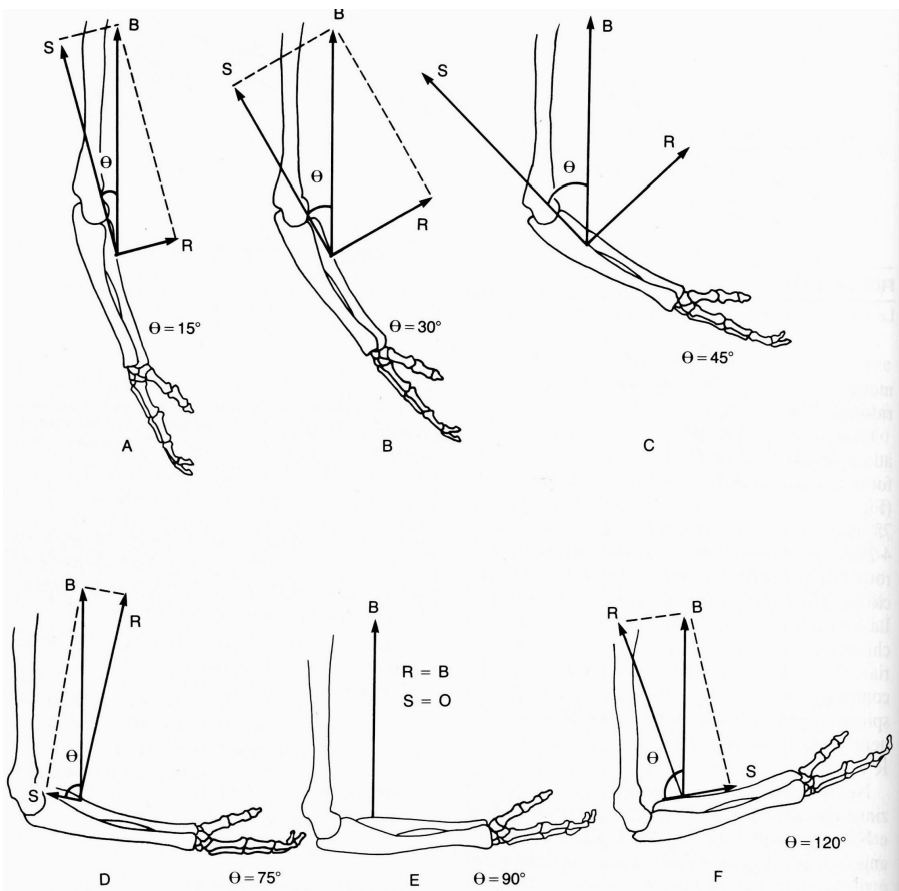
sistema di pressioni che agiscono tra le zone stesse e il terreno. Questa distribuzione di pressioni gioca un ruolo fondamentale nella riduzione delle sollecitazioni nelle ossa del piede. Nella corsa, nel salto e in altri movimenti che comportano il trasferimento di carichi elevati in corrispondenza del calcagno, la presenza di un cuscino ripartitore ed equilibratore delle pressioni di contatto, permette di evitare spesso sollecitazioni nell'osso

superiori a quelle ammissibili. Un'analisi più accurata della struttura del piede mostra che questo, più che una trave con un solo elemento, è costituito da una catena di "conci" che approssimano il profilo di un arco. Senza entrare in dettagli sull'analisi delle strutture ad arco, non consona al carattere di questo testo, è possibile intuire che gli sforzi di flessione sono molto ridotti rispetto a quelli di compressione. In termini qualitativi, possiamo dire che le azioni interne di flessione sono tanto maggiori quanto più il punto considerato è lontano dalla linea d'asse dell'arco. Il carico è trasmesso dall'astragalo in corrispondenza di una cerniera virtuale, indicata in figura. Da questa semplice rappresentazione si deduce quanto importante



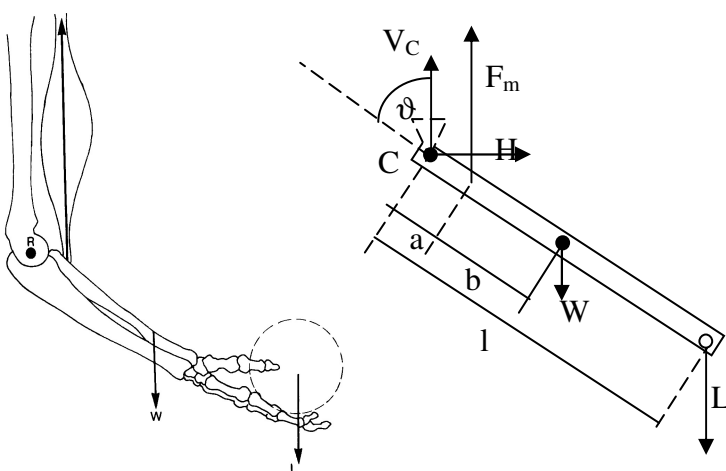
sia una corretta conformazione dell'arco plantare. Nei bambini in particolare, soggetti ad una rapida evoluzione e crescita delle ossa dello scheletro, può spesso verificarsi un appiattimento dell'arco, con conseguenti azioni di flessione che peggiorano il regime statico. A questo si aggiunge, nei casi più gravi, un appoggio totale della pianta sul terreno, con alterazione anche della corretta sequenza di rotazione del piede durante la deambulazione, con difficoltà a formare la cerniera virtuale, in vicinanza dell'alluce, intorno alla quale deve avvenire la corretta rotazione. La struttura ad arco così individuata si comporta come una struttura elastica, favorendo l'ammortizzazione delle forze di tipo dinamico, attraverso la catena d'elementi smorzanti dei vari elementi del piede. E' già stato detto che nella corsa e nella deambulazione lenta, la zona più esposta a carichi elevati è il calcagno. Nella corsa questo è il primo punto di contatto, nell'impatto conseguente alla chiusura di una falcata. I carichi in questa fase sono molto elevati, e difficilmente prevedibili, se non con larghissima approssimazione, attraverso un modello. E' invece relativamente agevole la misura sperimentale, attraverso l'inserzione nel tallone della calzatura di un trasduttore di forza. La tecnologia legata alla progettazione delle calzature per le attività sportive e il tempo libero ha preso nella giusta considerazione il problema del contenimento dei carichi dinamici, con diverse soluzioni che vanno dal cuscinetto d'aria nel tallone, ai sistemi di molle etc. Sistemi di questo tipo hanno una duplice efficacia, infatti, oltre a garantire un effetto ammortizzante delle forze dinamiche sul tallone, permettono anche di recuperare una parte dell'energia cinetica, che altrimenti andrebbe irrimediabilmente persa. Si lascia a studi specialistici un approfondimento di questi interessanti problemi.

Equilibrio del braccio.



La figura a sinistra mostra il braccio con diversi angoli d'inclinazione dell'avambraccio rispetto ad un riferimento verticale. La forza B è quella generata dal muscolo bicipite. Questa può essere scomposta in due componenti, la prima perpendicolare, la seconda parallela all'avambraccio. Si può osservare come, ad esempio, per $\theta = 90^\circ$ la componente parallela si annulla mentre quella normale è massima. Prendendo in considerazione questa configurazione e immaginando che in corrispondenza della mano sia presente un carico di peso noto, è facile rilevare

che la forza muscolare può essere facilmente determinata con un'equazione di equilibrio di momento. Si ha, infatti, considerando l'immagine in figura, una situazione statica analoga allo schema rappresentato nella figura sotto, nella quale si è considerato, insieme al carico L che insiste sulla mano, il peso proprio dell'avambraccio W. Conoscendo il peso e il baricentro dell'avambraccio, le incognite da determinare sono le componenti della reazione vincolare in C e la forza muscolare F_m . Si ha quindi:



$$H_C = 0$$

$$V_C + F_m - W - L = 0$$

$$F_m \sin \vartheta^* a - W \sin \vartheta^* b - L \sin \vartheta^* l = 0$$

da cui si ha:

$$F_m = W \frac{b}{a} + L \frac{l}{a}$$

$$V_C = W \left(1 - \frac{b}{a}\right) + L \left(1 - \frac{l}{a}\right)$$

Si osservi che la reazione vincolare V_c ha due componenti, la prima nella direzione dell'avambraccio, $V_C \cdot \cos \vartheta$, la seconda in direzione normale a questo, $V_C \cdot \sin \vartheta$.

4.8 FORZE DI CAMPO

- Tra le forze di campo più frequentemente trattate nei problemi di ingegneria troviamo:
- Forze di gravità
- Forze elettromagnetiche
- Forze d'inerzia
- Forze di gravità.

Il campo della gravità dovuto all'attrazione terrestre su qualunque corpo dotato di massa genera forze proporzionali alla massa del corpo e all'accelerazione di gravità, variabile con la latitudine e con la quota. Il valore standard dell'accelerazione di gravità è $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. La variazione con la latitudine e la quota è ben approssimata dalla formula:

$$g = 9,78075 * (1 + 0,00524 \sin^2 \phi * (1 - 2,926 * 10^{-8} h)) \frac{m}{s^2}$$

in cui ϕ è la latitudine in gradi e h la quota, in metri sul livello del mare. La forza di gravità di un corpo deve essere considerata come risultante delle forze elementari che agiscono sulle sue particelle dotate di massa, ed è applicata nel baricentro. La forza è diretta dal baricentro del corpo verso il centro della terra. Il suo valore è $P = mg$.

4.9 FORZE ELETTROMAGNETICHE

Quando una particella elettrica con carica e si trova all'interno di un campo elettrico, essa è soggetta ad una forza che vale:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}$$

dove \mathbf{E} è l'intensità del campo elettrico. Se la particella è mobile all'interno di un campo magnetico con intensità \mathbf{H} essa è soggetta ad una forza pari a:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

dove \mathbf{V} è il valore del potenziale elettrico nel punto in cui si trova la particella.

4.10. FORZE D'INERZIA

Il principio di d'Alembert

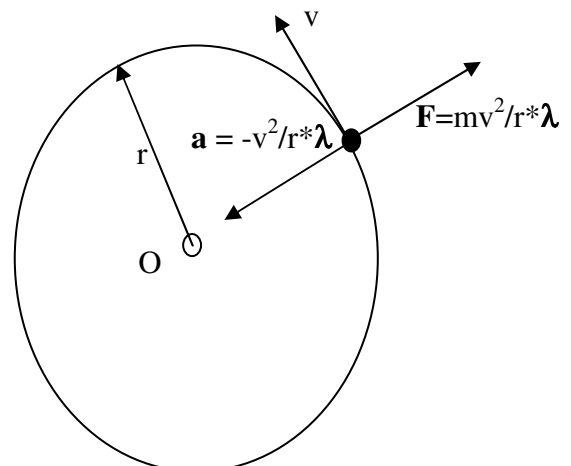
Per il secondo principio della dinamica, che verrà più estesamente illustrato nel seguito, un corpo soggetto ad un sistema di forze acquista un'accelerazione data da:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

L'accelerazione assunta dal corpo è un vettore, con la stessa direzione del risultante delle forze agenti sul corpo e con modulo pari a F/m . Se la risultante delle forze applicate non passa per il baricentro G e sul corpo sono applicate anche coppie \mathbf{C} si ha:

$$\sum (\mathbf{C}_i + \mathbf{GP} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{J} \ddot{\vartheta}$$

Le equazioni del moto scritte precedentemente vengono riformulate, secondo il principio di d'Alembert, come equazioni di equilibrio portando al primo membro i termini $-m\mathbf{a}$ e $-\mathbf{J} \ddot{\vartheta}$ che assumono il carattere di forza e



coppia d'inerzia. Le equazioni del moto diventano così equazioni di equilibrio dinamico:

$$\sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{a} = 0$$

$$\sum (\mathbf{C}_i + \mathbf{GP} \times \mathbf{F}_i) - \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} = 0$$

Un corpo dotato di un'accelerazione di traslazione e di un'accelerazione angolare è soggetto ad una forza d'inerzia pari a $-m\mathbf{a}$, essendo \mathbf{a} l'accelerazione del suo baricentro e ad una coppia d'inerzia $-\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\vartheta}}$, essendo \mathbf{J} la sua matrice d'inerzia rispetto ad assi baricentrici e $\ddot{\boldsymbol{\vartheta}}$ il vettore della sua accelerazione angolare.

Esempio

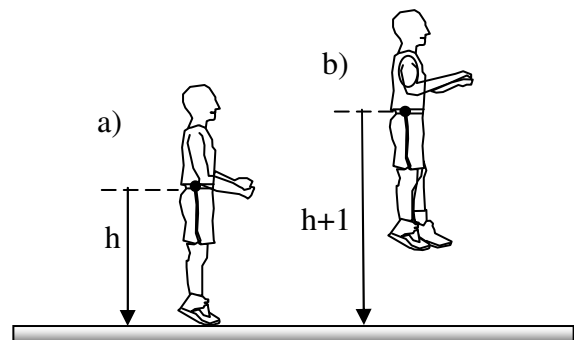
Un punto materiale si muove con velocità costante, di moto circolare. La sua accelerazione è puramente centripeta e vale $-\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\lambda}$. A questa accelerazione corrisponde una forza d'inerzia (la forza centrifuga) di valore pari a $-m\mathbf{a}$ cioè $m\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\lambda}$. In queste condizioni il punto non può essere in equilibrio senza una forza che equilibri la forza centrifuga, diretta cioè dal punto verso il centro.

4.11 ESERCIZI

Lavoro ed energia

S.4 Un giocatore di basket si flette prima di saltare e in a) il suo baricentro ha una velocità costante nel momento in cui i suoi piedi lasciano il suolo, e in b) raggiunge la massima altezza. Se il saltatore riesce a sollevare il suo baricentro di 1 m calcolare la velocità v_0 del suo baricentro nella posizione a).

R. $v = 4,43 \text{ m/s}$.

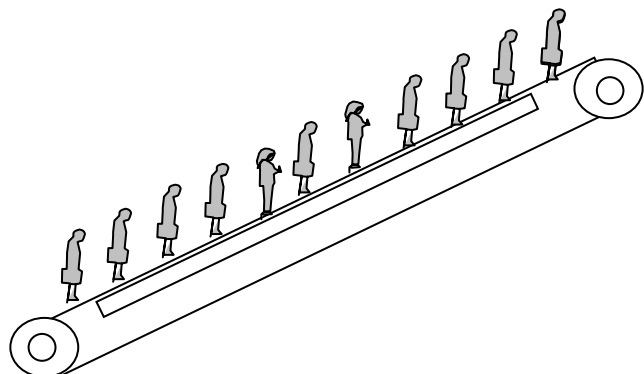


Soluzione

Quando il giocatore raggiunge con il suo baricentro la massima quota rispetto a quella di partenza la sua energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è massima. Se si assume il sistema come conservativo si ha.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,42 \text{ m/s}$$

S.5 Una scala mobile di un grande magazzino movimentata un carico di 30 persone al minuto portandole dal primo al secondo piano e superando un dislivello di 7 m. La persona media ha una massa di 65 kg. Se il motore che potenzia l'unità ha una potenza di 3 kW, si calcoli il rendimento meccanico del sistema, cioè il rapporto tra energia spesa e lavoro svolto. R. $\eta=0,74$



Il lavoro speso in un minuto per sollevare 30 persone di 7 m è:

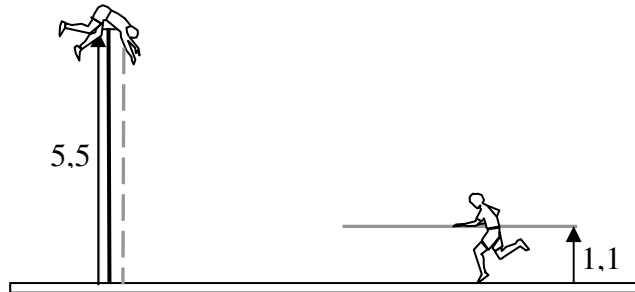
$$L = 30 * 65 * 9,81 * 7 = 133.907 J$$

La potenza, ovvero il lavoro speso in un secondo e il rendimento risultano:

$$W = 133.907 / 60 = 2231 W$$

$$\eta = 2231 / 3000 = 0,74$$

S.6 Un saltatore con l'asta di massa pari a 80 kg porta un'asta lunga 4,9 m ed è di massa 4,5 kg con velocità v e riesce a superare l'asticella a 5,5 m. Nel momento in cui passa l'asticella, la sua velocità e quella dell'asta sono essenzialmente nulle. Calcolare il minimo valore possibile di v per riuscire nel salto. Il sistema saltatore-asta ha un baricentro che si trova a 1,1 m sopra il suolo al momento della rincorsa.



Il sistema saltatore-asta ha un baricentro che si trova a 1,1 m sopra il suolo al momento della rincorsa.

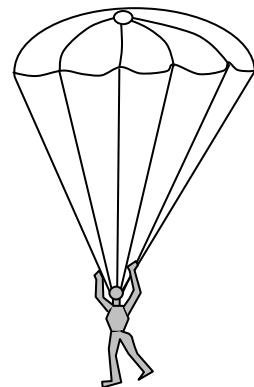
Soluzione.

Se si suppone il sistema conservativo l'energia cinetica del saltatore si converte in energia potenziale e si calcola la quota y_G del baricentro del sistema saltatore-asta al passaggio dell'asticella si ottiene:

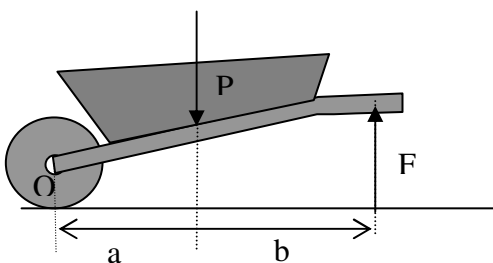
$$y_G = \frac{80 * 5,5 + 4,5 * 2,45}{84,5} = 5,34 \quad ; \quad \frac{1}{2} (80 + 4,5) * v^2 = 84,5 * 9,81 * (5,34 - 1,1)$$

$$v = \sqrt{2 * 9,81 * 4,24} = 9,12 m/s$$

S.7 Un paracadutista con equipaggiamento completo ha peso $P = 1000 N$. determinare il diametro del paracadute necessario affinché la velocità di discesa sia pari a 4 m/s, assunto un coefficiente di resistenza aerodinamica $C_R = 1,1$ e la densità dell'aria $\rho = 1,19 kg/m^3$. R. La risposta a questo problema è illustrata nel testo.



S.8 Il carico P trasportato con la carriola in figura è pari a 600 N. Note le dimensioni $a = 380 mm$ e $b = 800 mm$ determinare la forza verticale F esercitata sui manici della carriola e la forza N trasmessa dalla ruota al terreno, quando la carriola è ferma nella posizione indicata.



Soluzione.

E' sufficiente scrivere l'equilibrio dei momenti rispetto al punto O:

$$P * a - F(a + b) = 0 \quad F = \frac{P * 0,38}{1,18} = 193,22 N$$

4.12 Coefficienti d'attrito volvente

Materiali	f_v
Ruote d'acciaio su acciaio (superfici lucide)	0,0005-0,002
Pneumatici su strada asfaltata, carichi tra 1000 e 5000 N e pressione di gonfiaggio di 200 kPa	0,08-0,012
Pneumatici su cemento	0,018-0,035
Pneumatici su sabbia compatta	0,013-0,016
Pneumatici su sabbia non compatta	0,18-0,45

4.13 Coefficienti d'attrito radente

MATERIALI	f_a	f
Acciaio/Acciaio – Sup. asciutte – senza lubr.	0,78	0,42
Acciaio/Acciaio - In presenza di lubrificante	0,12-0,2	0,06-0,085
Acciaio/Acciaio - In presenza di grafite	0,12	0,058-0,07
Acciaio/Acciaio - Con bisolfuro di molibdeno	0,10	0,033-0,05
Acciaio/ghisa – Superfici asciutte	0,40	0,23
Acciaio/bronzo fosforoso		
Superfici asciutte	0,40-0,23	
Superfici lubrificate	0,1-0,15	0,04-0,07
Acciaio/ottone – superfici asciutte	0,51	0,44
Acciaio/rame – Superfici asciutte	0,53	0,36
Acciaio/Alluminio – Superfici asciutte	0,61	0,47
Acciaio/legno – Superfici asciutte		0,4-0,65
Ghisa/legno – Superfici asciutte		0,29-0,80
Legno/legno – Superfici asciutte	0,54-0,62	0,42-0,48
Ottone/legno		0,48
Mattone/legno	0,3-0,4	
Acciaio/smeriglio		0,28-0,5
Acciaio/ghiaccio	0,30	0,035
Ottone/ghiaccio		0,075
Vetro/vetro	0,94	0,40
Rame/vetro	0,68	0,58
Acciaio/sughero	0,45	
Acciaio/teflon	0,04	
Acciaio/pietra	0,3-0,7	
Ghisa/cuoio		0,50
Pneumatici/asfalto(asciutto), valore medio	0,75	0,6
Solidi su gomma	1-4	

4.14 DENSITA' DEI MATERIALI (KG/M³)

MATERIALI METALLICI	
Acciaio	7830
Leghe di Al	2700-2800
Leghe di magnesio	1770-1830
Leghe di titanio	4450-4730
Ottone	8400-8900
Bronzo	7500-9000
Leghe di nickel	8030-8880
Leghe di berillio	1855
MATERIALI NON METALLICI	
Laminati plastici	1200-2200
Elastomeri	1900-1950
Grafite	1400-1900
Resine epossidiche	1850
Policarbonati	1200-1510
Poliesteri	1060-1460
Nylon	1090-1140
Polistirene	1040-1070
Polietilene	920-960
Gomma naturale	930
Polipropilene	910

5. DINAMICA

5.1 DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Riportiamo le leggi della dinamica osservando che la formulazione Newtoniana era scalare mentre la meccanica moderna le esprime in modo vettoriale. Ci si riferisce inizialmente ad un punto materiale.

1. *Un punto materiale conserva il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non interviene una forza a perturbare questo stato. Sia che il punto stia in quiete rispetto al sistema di riferimento, sia che si trovi in uno stato di moto rettilineo uniforme, un osservatore posto sul corpo non percepirà alcuna differenza, quindi in ambedue queste condizioni la risultante e il momento risultante delle forze agenti sul corpo rispetto al baricentro sono nulli.*

$$\sum \mathbf{F}_i = 0$$

2. *Se su un punto materiale agisce un sistema di forze con risultante non nulla l'accelerazione assunta dal punto è un vettore con la stessa direzione del risultante delle forze agenti sul corpo e con modulo pari a F/m .*

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

che può essere scritta, introducendo la forza d'inerzia $-m\mathbf{a}$ al primo membro, come un'equazione di equilibrio. L'equazione scritta in questa forma prende il nome d'equazione d'equilibrio dinamico

$$\sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{a} = 0$$

3. *Ad ogni azione esercitata da un corpo su un altro corrisponde una reazione eguale e contraria alla prima. La legge si applica sia al caso in cui i corpi siano a contatto sia nel caso di forze di campo come quelle gravitazionali, campi elettrici etc.*

Quantità di moto.

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il prodotto $m\mathbf{v}$ della massa del punto per la sua velocità:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$$

Ricordiamo che la quantità di moto è un vettore.

Se torniamo al secondo principio della dinamica, impiegando la definizione della quantità di moto possiamo scrivere, sempre per un punto materiale:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

L'equazione precedente mostra che la risultante delle forze applicate a un punto materiale è eguale alla derivata della sua quantità di moto. Se il punto è soggetto ad un sistema di forze equilibrato, o non vi sono forze esterne si ha:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = 0 \quad \mathbf{Q} = \text{cost}$$

Se su un punto materiale agisce un sistema di forze equilibrato, la sua quantità di moto si mantiene costante. Quando invece la risultante

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$$

delle forze esterne è diversa da zero, definendo:

$$\hat{\mathbf{R}} = \int_0^t \mathbf{R} dt$$

l'impulso della forza \mathbf{R} , si ha:

$$\int_0^t \mathbf{R} dt = \int_0^t \frac{d\mathbf{Q}}{dt} dt = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$$

l'impulso totale, in un intervallo di tempo t , delle forze agenti su un punto materiale è eguale alla variazione della sua quantità di moto nello stesso intervallo.

Si definisce momento della quantità di moto di un punto materiale rispetto ad un qualunque polo O la quantità:

$$\mathbf{H} = \mathbf{OP} \times m\mathbf{v}$$

Derivando quest'espressione rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{OP} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} - \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right) \times m\mathbf{v} + \mathbf{OP} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{OP} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q}$$

Perché $\frac{d\mathbf{P}}{dt} \times m\mathbf{v} = 0$ è il prodotto vettoriale di due vettori paralleli.

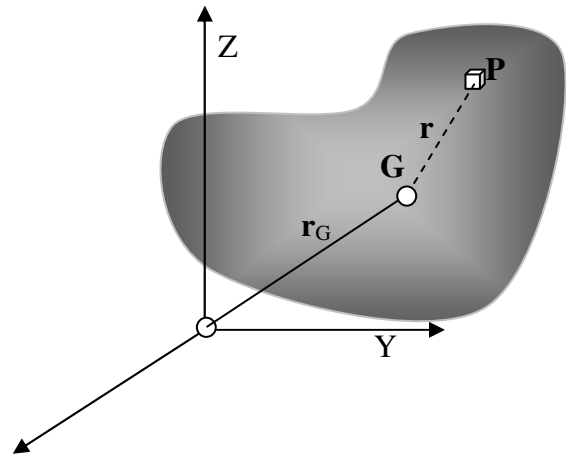
5.2 DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Le equazioni ricavate per un punto materiale trovano una facile estensione ai corpi di dimensione finita, aventi massa distribuita. La quantità di moto si può ottenere come somma delle quantità di moto infinitesime di tutti gli elementi di massa. Ricordando che la velocità di un punto generico è pari alla velocità di un altro punto, ad esempio il baricentro, sommata con la velocità dovuta alla rotazione del corpo intorno ad un asse passante per il baricentro, si ha:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{Q} = \int_M \mathbf{v} dm = \int_M \mathbf{v}_G dm + \int_M \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}) dm = M\mathbf{v}_G$$

$$\text{in quanto} \quad \int_M \mathbf{r} dm = 0$$



La relazione precedente dice che la quantità di moto di un corpo esteso può essere valutata come se tutta la sua massa fosse concentrata nel baricentro.

Il secondo principio mantiene la stessa forma trovata per il punto materiale:

$$\sum \mathbf{F}_i = M\mathbf{a}_G = M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

Con l'unica variante che, per un corpo rigido, l'accelerazione da inserire nella formula è quella del suo baricentro. Ancora una volta l'equazione d'equilibrio dinamico del corpo si può scrivere:

$$\sum \mathbf{F}_i - M\mathbf{a}_G = 0$$

Il momento della quantità di moto si può ottenere scegliendo inizialmente come polo il baricentro:

$$\mathbf{H} = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_M \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v}_G dm + \int_M \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$$

$$\text{infatti } \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v}_G dm = -\mathbf{v}_G \times \int_M \mathbf{r} dm = 0$$

Nell'espressione precedente \mathbf{J} è la matrice d'inerzia, calcolata rispetto ad un sistema di assi baricentrico. Se gli assi sono scelti coincidenti con gli assi principali d'inerzia, la matrice \mathbf{J} sarà diagonale e l'espressione del momento della quantità di moto sarà particolarmente semplice:

$$\mathbf{H} = J_{xx}\omega_x \mathbf{i} + J_{yy}\omega_y \mathbf{j} + J_{zz}\omega_z \mathbf{k}$$

Dove $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sono le componenti della velocità angolare del corpo sui tre assi di riferimento. Nel caso in cui si desideri esprimere il momento della quantità di moto rispetto ad un polo qualsiasi, non coincidente col baricentro si ha:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{OG} \times M\mathbf{v}_G$$

l'espressione precedente esprime il principio di trasposizione del momento della quantità di moto. Il secondo principio per la rotazione si scriverà, in analogia con quanto visto per la traslazione. Assunto un polo arbitrario O , il momento risultante delle forze esterne e delle coppie applicate è eguale al momento, rispetto allo stesso polo, delle forze elementari d'inerzia di ogni elemento infinitesimo di massa che compone il corpo. Si ha quindi:

$$\sum_i (\mathbf{C}_i + \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i) = \int_M (\mathbf{r} + \mathbf{r}_{OG}) \times \mathbf{a} dm = \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} + \mathbf{r}_{OG} \times M\mathbf{a}_G = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \times M\mathbf{v}_G$$

Nel caso in cui il polo scelto sia il baricentro, il secondo membro si riduce a $\frac{d\mathbf{H}_G}{dt}$ in quanto $\mathbf{r}_{OG} = 0$ se è un punto fisso si riduce a $\frac{d\mathbf{H}_O}{dt}$ in quanto $\mathbf{v}_O = 0$. Nell'uno e nell'altro caso, indicando il primo membro dell'equazione precedente con \mathbf{M}_R , momento risultante delle forze e coppie esterne applicate, si ha:

$$\mathbf{M}_R = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

dove \mathbf{J} è calcolato con riferimento al polo scelto. Introducendo l'impulso del momento

$$\hat{\mathbf{M}}_R = \int_0^t \mathbf{M}_R dt$$

si ha:

$$\mathbf{M}_R = \int_0^t \mathbf{M}_R dt = \int_0^t \frac{d\mathbf{H}}{dt} dt = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$$

L'impulso, nell'intervallo di tempo t , del momento risultante delle forze e coppie agenti sul sistema è eguale alla variazione del momento della quantità di moto del sistema stesso.

Riassumendo, per un corpo rigido si ha:

- La risultante di tutte le forze esterne e reazioni vincolari agenti sul sistema e la risultante delle forze d'inerzia formano un sistema equilibrato:

$$R + R' = \sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{a} = 0$$

- Il momento risultante di tutte le forze esterne e reazioni vincolari rispetto ad un polo coincidente col baricentro o fisso, più il momento risultante delle coppie esterne, eguaglia la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto del sistema, che, con il segno cambiato, rappresenta la coppia d'inerzia risultante:

$$\mathbf{M}_R + \mathbf{M}'_R = \sum_i (\mathbf{C}_i + \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i) - \frac{d\mathbf{H}_G}{dt} = 0 \quad \text{con } \mathbf{H}_G = \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega}$$

Esempio 1

Moto di una ruota su una guida sotto l'azione di una forza costante nel suo centro.

Dopo avere sostituito i vincoli con le relative reazioni possiamo scrivere le equazioni di equilibrio, ricordando che le azioni d'inerzia sono costituite da una forza ed una coppia risultanti.

$$N - P = 0$$

$$F - T - m\ddot{x} = 0$$

$$Nu + J\ddot{\vartheta} - TR = 0$$

da cui si ha:

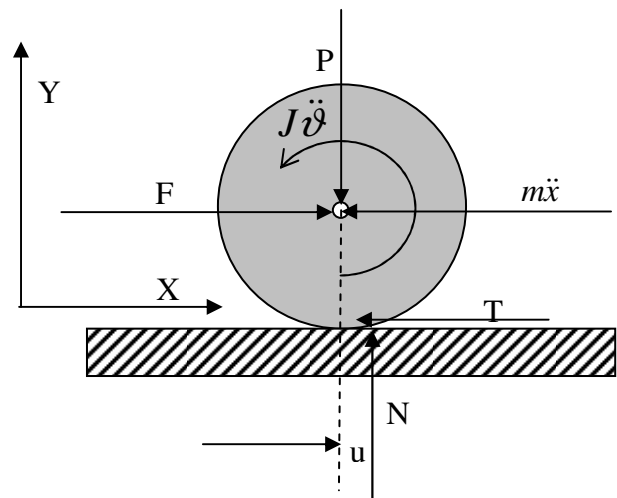
$$\ddot{x} = \ddot{\vartheta}R$$

$$N = P$$

$$T = F - m\ddot{\vartheta}R = F - mR \frac{(FR - Pu)}{J + mR^2} = \frac{FJ + mRPu}{J + mR^2}$$

$$J\ddot{\vartheta} + Pu - (F - m\ddot{\vartheta}R)R = 0$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{FR - Pu}{J + mR^2} \quad \ddot{x} = \ddot{\vartheta}R$$



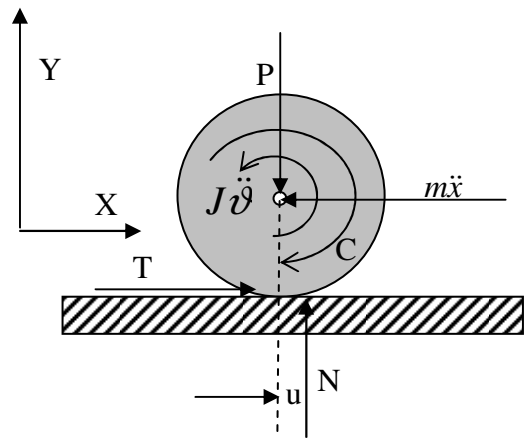
L'ultima relazione esprime l'ipotesi assunta, che il moto della ruota sia di rotolamento senza strisciamento. Questa ipotesi deve essere verificata dopo la soluzione del sistema, controllando che

si abbia $T \leq f_a N$. Se l'ipotesi non fosse verificata, le prime tre equazioni restano invariate ma l'ultima deve essere sostituita dalla relazione $T = fN$ che esprime il fatto che, in presenza di strisciamento la forza tangenziale T risulta costante e pari a fT , con f coefficiente d'attrito radente della coppia di materiali della ruota e della guida. Nel caso sia necessario ripetere la soluzione del sistema perchè la verifica di moto di puro rotolamento non è soddisfatta, le equazioni sono, come si è detto:

$$\begin{aligned}
 N - P &= 0 & T &= fP \\
 F - T - m\ddot{x} &= 0 & \text{e la soluzione del sistema fornisce: } \ddot{x} &= \frac{F - fP}{m} \\
 Nu + J\ddot{\vartheta} - TR &= & \ddot{\vartheta} &= \frac{P(fr - u)}{J} \\
 T &= fN
 \end{aligned}$$

Esempio 2 Moto di una ruota soggetta ad una coppia motrice intorno al suo asse.

Il caso precedente è tipico delle ruote trainate dei veicoli, quello presente è invece il caso delle ruote motrici. L'azione esterna è questa volta una coppia C applicata all'asse. È interessante notare che l'azione tangenziale T applicata alla ruota dal vincolo della guida è ora diretta nel senso del moto e costituisce proprio la forza che rende possibile l'avanzamento. Le equazioni del moto si scrivono in modo non molto dissimile dal caso precedente:



$$\begin{aligned}
 N - P &= 0 \\
 T - m\ddot{x} &= 0 \\
 Nu + J\ddot{\vartheta} + TR - C &= 0
 \end{aligned}$$

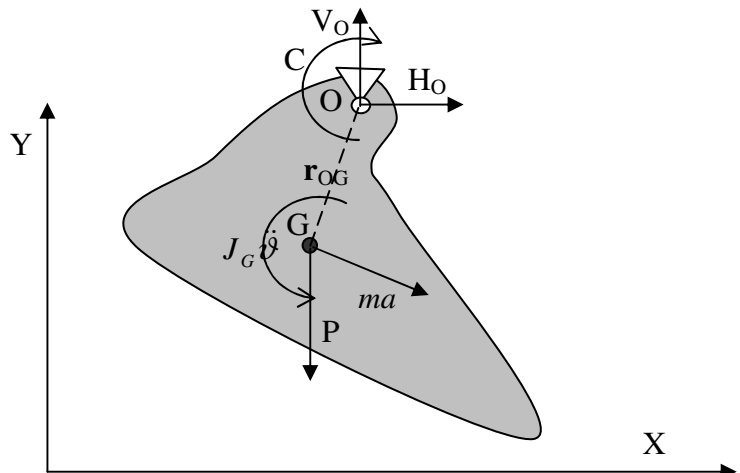
per cui la soluzione è

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \ddot{\vartheta}R \\
 N = P & \quad \ddot{\vartheta} = \frac{C - Pu}{(J + mR^2)} \quad \ddot{x} = R\ddot{\vartheta} = R \frac{C - Pu}{(J + mR^2)} \quad T = m\ddot{x} = mR \frac{C - Pu}{(J + mR^2)}
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso è necessario verificare che il valore di T ottenuto non superi quello massimo, corrispondente all'inizio dello slittamento. Se questo avvenisse, occorre ripetere il calcolo sostituendo alla seconda equazione la relazione $T = fN$. Lasciamo questo calcolo alla diligenza del lettore.

Esempio 3

Moto di un corpo intorno ad un punto fisso. Ci riferiamo a un caso di moto piano, ma le leggi e le deduzioni che faremo sono del tutto generali e applicabili anche al moto spaziale con un punto fisso. Il corpo considerato è soggetto alla forza peso in direzione verticale, una forza d'inerzia, diretta in nella direzione normale ad OG e con verso opposto a quello dell'accelerazione, una coppia esterna C e la reazione vincolare nel fulcro attorno al quale il corpo ruota. Si osservi che



non è strettamente necessario “indovinare” il giusto verso della forza d’inerzia, in quanto è sufficiente adottare un verso convenzionale.. Al momento della sua determinazione effettiva questa scelta sarà poi confermata o smentita in base al segno delle componenti del vettore ottenuto. Scrivendo le equazioni di equilibrio in forma scalare si ha:

$$\begin{aligned} H_o + ma_x &= 0 \\ V_o - ma_y - P &= 0 \\ C - J_G \ddot{\vartheta} - ma * r_{OG} &= 0 \\ a &= r_{OG} \ddot{\vartheta} \end{aligned}$$

Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite $H_o, V_o, a, \ddot{\vartheta}$. Si osservi che nella terza equazione, usando per a l’espressione della quarta equazione, si ottiene:

$$C = (J_G + mr_{OG}^2) \ddot{\vartheta} = J_o \ddot{\vartheta} = \frac{dH_o}{dt}$$

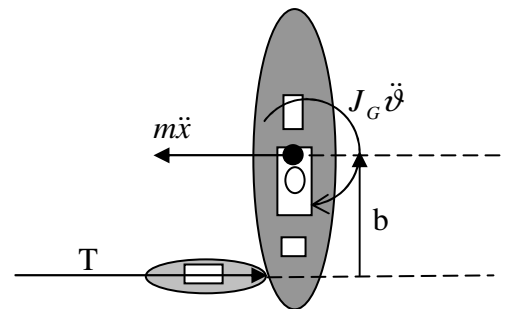
l’equazione di momento, scritta rispetto al fulcro, consente quindi di ottenere immediatamente l’accelerazione angolare e, successivamente, l’accelerazione del baricentro,

Esempio 4

Un rimorchiatore si appoggia ad una nave in corrispondenza della poppa e la spinge con una forza nota T. Supponendo di trascurare la resistenza dell’acqua e considerando la nave inizialmente ferma, si determini l’accelerazione della nave nel baricentro e la sua accelerazione angolare.

R. Le equazioni di equilibrio dinamico devono contenere tutte le azioni esterne e d’inerzia agenti sulla nave. Si ha allora:

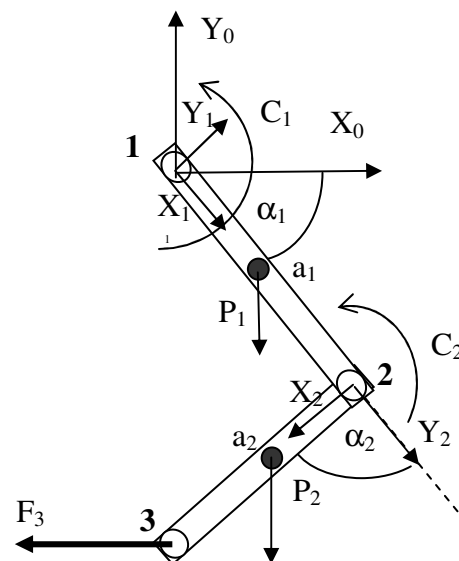
$$\begin{aligned} T - m\ddot{x} &= 0 \\ Tb - J_G \ddot{\vartheta} &= 0 \end{aligned}$$



Le due equazioni scritte contengono due incognite $\ddot{x}, \ddot{\vartheta}$ e permettono una rapida determinazione di queste quantità. L’allievo cerchi di estendere quest’applicazione al caso in cui la forza T non è perpendicolare all’asse della nave, ma obliqua.

9.4 Applicazioni - Dinamica di semplici sistemi articolati

Questi problemi hanno per obiettivo quello di determinare il campo di velocità ed accelerazione in un sistema, dovuto all’applicazione di un insieme di forze. Dualmente, nella dinamica inversa si vuole ottenere le forze applicate partendo dalle accelerazioni e velocità dei punti del sistema. Per mostrare la metodologia da applicare nella soluzione di problemi di dinamica faremo riferimento al semplice sistema con due elementi articolati, visto in precedenza. Si assumerà che il sistema sia inizialmente fermo e soggetto ad una forza orizzontale nel punto 3 e a due coppie, C_1, C_2 nei giunti 1 2. Per quanto riguarda le coppie applicate, esse



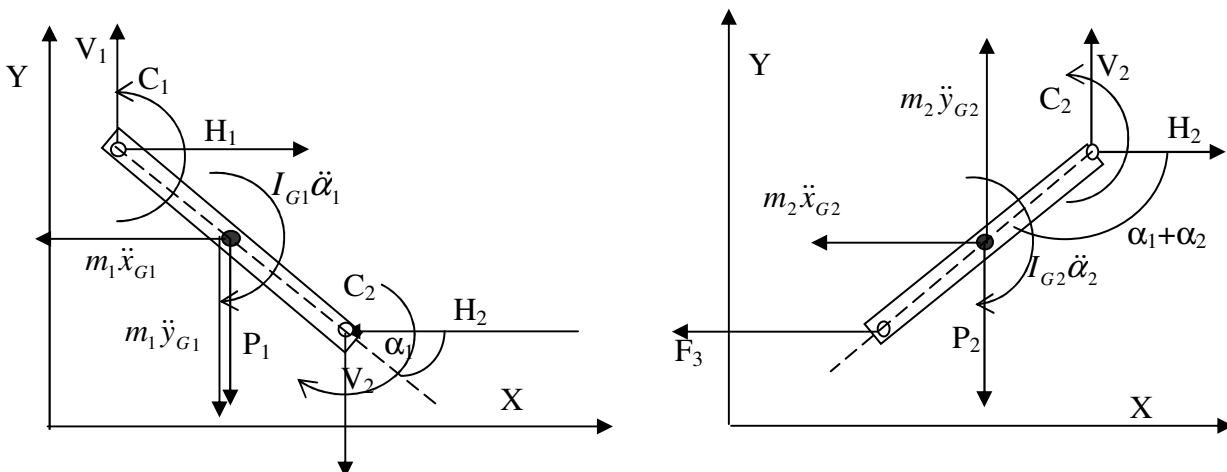
devono essere interpretate come azioni interne, in particolare la coppia C_1 che supponiamo agisca sull'elemento 1, col verso rappresentato in figura, sarà accompagnata da una coppia, eguale in modulo e di verso contrario, che agisce sull'elemento 0, in questo caso il telaio, la parte fissa del sistema. Analogamente la coppia C_2 , pensata col verso in figura, agente sull'elemento 2, sarà accompagnata da una coppia eguale e contraria agente sull'elemento 1. Questo perché ogni azione è accompagnata da una reazione eguale e contraria, come insegna il terzo principio della dinamica. I dati che assumeremo nel calcolo saranno i seguenti :

$$a_1 = a_2 = 0,5m \quad \alpha_1 = 45^\circ \quad \alpha_2 = 90^\circ \quad m_1 = m_2 = 1kg \quad C_1 = C_2 = 10 Nm$$

$$\rho_1 = 0,2m \quad \rho_2 = 0,2m \quad F_3 = 10 N$$

Le variabili ρ_1, ρ_2 indicano i raggi d'inerzia dei due elementi. Supponendo che il sistema rappresentato giaccia in un piano verticale, abbiamo tenuto conto anche della presenza della gravità, inserendo i pesi P_1, P_2 dei due elementi, applicati nei rispettivi baricentri che, supponendo gli elementi costituiti da aste omogenee a sezione costante, saranno situati a metà lunghezza. La soluzione del problema dinamico si ottiene scrivendo i diagrammi di corpo libero degli elementi che lo compongono e ricavando le equazioni d'equilibrio. Trattandosi di un sistema piano si otterranno tre equazioni per ogni elemento, sei in totale, mentre le incognite da ricavare sono 10, vale a dire:

$$H_1, H_2, V_1, V_2, \ddot{x}_{G1}, \ddot{x}_{G2}, \ddot{y}_{G1}, \ddot{y}_{G2}, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2$$



Separando il primo e il secondo elemento e scrivendo le equazioni d'equilibrio dinamico si ottiene:

$$H_1 - H_2 - m_1 \ddot{x}_{G1} = 0$$

$$V_1 - V_2 - m_1 \ddot{y}_{G1} - P_1 = 0$$

$$C_1 - I_{G1} \ddot{\alpha}_1 - m_1 \ddot{x}_{G1} \frac{a_1}{2} \sin(\alpha_1) - P_1 \frac{a_1}{2} \cos(\alpha_1)$$

$$- m_1 \ddot{y}_{G1} \frac{a_1}{2} \cos(\alpha_1) - V_2 a_1 \cos(\alpha_1) - H_2 a_1 \sin(\alpha_1) = 0$$

$$H_2 - m_2 \ddot{x}_{G2} - F_3 = 0$$

$$V_2 + m_2 \ddot{y}_{G2} - P_2 = 0$$

$$C_2 - I_{G2} \ddot{\alpha}_2 - m_2 \ddot{x}_{G2} \frac{a_2}{2} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - P_2 \frac{a_2}{2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$+ m_2 \ddot{y}_{G2} \frac{a_2}{2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - F_3 a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

Le relazioni supplementari che possono essere aggiunte al sistema, sono di tipo cinematico ed esprimono relazioni tra accelerazioni, ottenute applicando il teorema di Rivals:

$$\ddot{x}_{G1} = \ddot{\alpha}_1 \frac{a_1}{2} \sin(\alpha_1)$$

$$\ddot{y}_{G1} = \ddot{\alpha}_1 \frac{a_1}{2} \cos(\alpha_1)$$

$$\ddot{x}_{G2} = \ddot{\alpha}_1 a_1 \sin(\alpha_1) + (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) \frac{a_2}{2} \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\ddot{y}_{G2} = \ddot{\alpha}_1 a_1 \cos(\alpha_1) - (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) \frac{a_2}{2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Abbiamo quindi un sistema di 10 equazioni lineari nelle 10 incognite $\ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, H_1, V_1, H_2, V_2, \ddot{x}_{G1}, \ddot{y}_{G1}, \ddot{x}_{G2}, \ddot{y}_{G2}$. La soluzione è affidata al solutore di sistemi dell'ambiente Matlab.

La matrice dei coefficienti è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.18 & 0 & -0.18 & 0 & -0.063 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.35 & 0 & -0.35 & -0.18 & 0 & -0.18 & 0 & 0 & -0.063 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.53 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.53 & -0.18 \end{bmatrix}$$

Il vettore dei termini noti:

$$B = \begin{bmatrix} 10.0000 \\ 9.81 \\ -8.20 \\ 0 \\ 9.81 \\ -8.27 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione, con le variabili nell'ordine

$$H_1, H_2, V_1, V_2, \ddot{x}_{G1}, \ddot{x}_{G2}, \ddot{y}_{G1}, \ddot{y}_{G2}, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2$$

è la seguente:

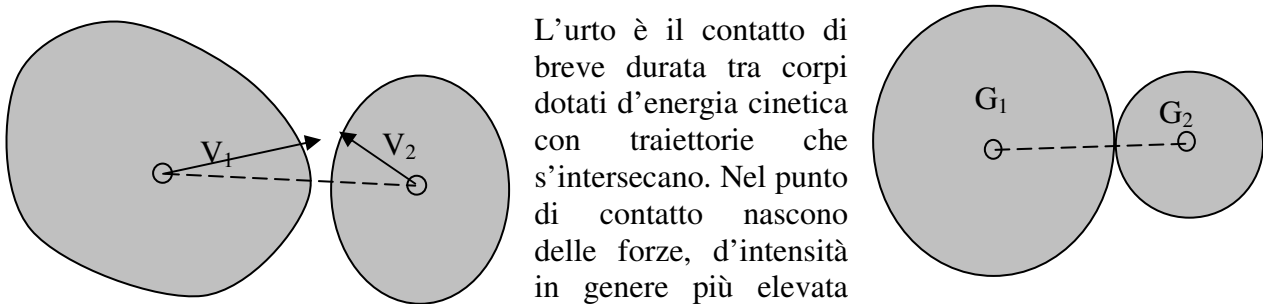
$$H_1 = 41,38 \text{ N} \quad H_2 = 33,47 \text{ N} \quad V_1 = -4,13 \text{ N} \quad V_2 = -13,66 \text{ N}$$

$$\ddot{x}_{G1} = 7,90 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{x}_{G2} = 23,47 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{y}_{G1} = -0,2739 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{y}_{G2} = 23,47 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{\alpha}_1 = 44,72 \text{ rad/s}^2 \quad \ddot{\alpha}_2 = -1,5 \text{ rad/s}^2$$

Si è anche risolto lo stesso problema usando il pacchetto Working Model 2D, software di simulazione meccanica che risolve le equazioni del moto in modo numerico, partendo da condizioni iniziali note e usando metodi comuni d'integrazione numerica.

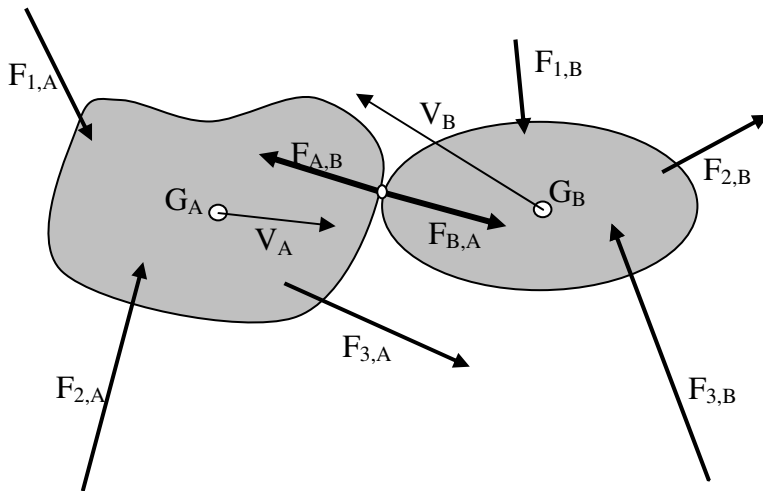
5.3 FENOMENI D'URTO.



L'urto è il contatto di breve durata tra corpi dotati d'energia cinetica con traiettorie che s'intersecano. Nel punto di contatto nascono delle forze, d'intensità in genere più elevata

delle forze agenti sui due corpi (peso, forze esterne) e di durata molto piccola.

Si definisce linea d'urto la normale alle superfici dei due corpi nel punto di contatto. L'urto si dice centrato se la linea d'urto passa per i baricentri d'entrambi i corpi che si urtano, eccentrico se questo non avviene. L'urto centrato si dice diretto quando le velocità dei baricentri dei due corpi sono allineate con la linea d'urto, obliquo in caso contrario, figura a sinistra.



5.3.1 Urto tra corpi liberi.

Nella figura sono state indicate le forze esterne agenti sui due corpi A,B e le forze che si generano durante l'urto, con spessore maggiore della linea. Utilizzando le espressioni viste in precedenza scriviamo la relazione che esprime la variazione della quantità di moto del sistema dei due corpi nell'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante immediatamente precedente la collisione e l'istante successivo:

$$\int_0^t \sum_i \mathbf{F}_{i,A} dt + \int_0^t \sum_i \mathbf{F}_{i,B} dt = (\mathbf{Q}_1^+ + \mathbf{Q}_2^+) - (\mathbf{Q}_1^- + \mathbf{Q}_2^-)$$

Si osservi che nella relazione precedente non compaiono gli impulsi delle forze dovute alla collisione, poiché queste forze, essendo forze mutue, si elidono a vicenda. Inoltre al primo membro dell'equazione scritta compare l'impulso di una serie di forze molto piccole rispetto alle forze di collisione. Ne deriva che le quantità a primo membro sono trascurabili e questo può essere considerato nullo. Segue quindi che la quantità di moto complessiva del sistema dei due corpi è costante ovvero:

$$(\mathbf{Q}_1^+ + \mathbf{Q}_2^+) = (\mathbf{Q}_1^- + \mathbf{Q}_2^-)$$

Pertanto in un urto libero la quantità di moto del sistema resta costante. Un'espressione analoga si ottiene per il principio di variazione del momento della quantità di moto. Si ha, infatti, considerando i momenti rispetto ad un qualunque polo O:

$$\int_0^t \mathbf{OC} \times \mathbf{F}_{A,B} dt + \int_0^t \mathbf{OC} \times \mathbf{F}_{B,A} dt = \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{H}_{A,O}}{dt} + \mathbf{V}_O \times \mathbf{Q}_A \right) dt + \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{H}_{B,O}}{dt} + \mathbf{V}_O \times \mathbf{Q}_B \right) dt = 0$$

$$J_{A,O}(\boldsymbol{\omega}_A^+ - \boldsymbol{\omega}_A^-) + J_{B,O}(\boldsymbol{\omega}_B^+ - \boldsymbol{\omega}_B^-) = 0 \quad \text{da cui si trae:}$$

$$J_{A,O}\boldsymbol{\omega}_A^+ + J_{B,O}\boldsymbol{\omega}_B^+ = J_{A,O}\boldsymbol{\omega}_A^- + J_{B,O}\boldsymbol{\omega}_B^-$$

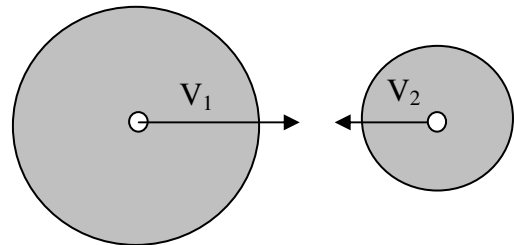
Pertanto in un urto tra corpi liberi si conserva il momento risultante della quantità di moto. Nell'espressione precedente è stato trascurato l'integrale del prodotto vettoriale $\mathbf{V}_O \times \mathbf{Q}_A$ e del prodotto $\mathbf{V}_O \times \mathbf{Q}_B$ per la stessa ragione, detta in precedenza, sui momenti delle forze esterne. Si tratta di quantità piccole a fronte degli impulsi dei momenti delle forze dovute alla collisione.

5.3.2 Urto centrato diretto.

.Si considerino due corpi che entrano in collisione in un urto centrato diretto. Il principio di conservazione della quantità di moto porta a :

$$\mathbf{Q}_1^+ + \mathbf{Q}_2^+ = \mathbf{Q}_1^- + \mathbf{Q}_2^-$$

$$m_1 \mathbf{v}_1^+ + m_2 \mathbf{v}_2^+ = m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-$$



dove gli indici - e + connotano rispettivamente gli stati immediatamente precedenti e immediatamente seguenti l'urto. L'equazione scritta non è da sola sufficiente a determinare le grandezze dopo l'urto, quando siano date quelle prima dell'urto. Per giungere a questo risultato è necessario introdurre un'altra equazione che tiene conto dell'energia dissipata. Per questo si introduce il coefficiente di restituzione:

$$e = -\frac{V_1^+ - V_2^+}{V_1^- - V_2^-}$$

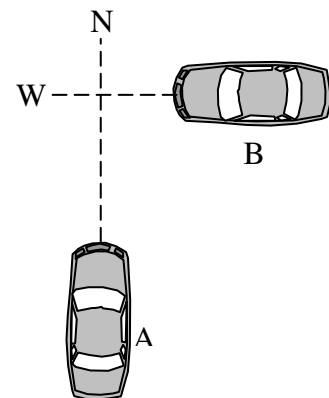
Il coefficiente di restituzione è una quantità scalare. Esso varia tra i valori limite 0 (urto completamente anelastico) e 1 (urto completamente elastico). Risolvendo il sistema delle due equazioni si ottiene:

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - em_2)v_1^- + m_2(1+e)v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - em_1)v_2^- + m_1(1+e)v_1^-}{m_1 + m_2}$$

L'energia meccanica persa E_d durante l'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche possedute dal sistema prima e dopo l'urto:

$$E_d = \frac{1}{2} m_1 (v_1^-)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^-)^2 - \frac{1}{2} m_1 (v_1^+)^2 - \frac{1}{2} m_2 (v_2^+)^2$$



Facendo uso del coefficiente di restituzione si ottiene facilmente:

$$E_d = \frac{m_1 m_2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} (v_1^- - v_2^-)^2$$

Alcuni coefficienti di restituzione tipici:

Materiale	e
Acciaio contro acciaio	0,65
Avorio contro avorio	0,89
Legno contro legno	0,50
Rame contro rame	0,40
Vetro contro vetro	0,93

Esempio 1.

L'auto B, di massa 1500 kg, che viaggia verso Ovest a 48 km/h entra in collisione con l'auto A, di 1600 kg, che viaggia verso Nord a 32 km/h. Le due macchine si incastrano e si muovono come un unico corpo dopo l'urto. Si calcoli la grandezza v della loro velocità comune immediatamente dopo l'urto e l'angolo del vettore velocità dopo l'urto con la direzione Nord.

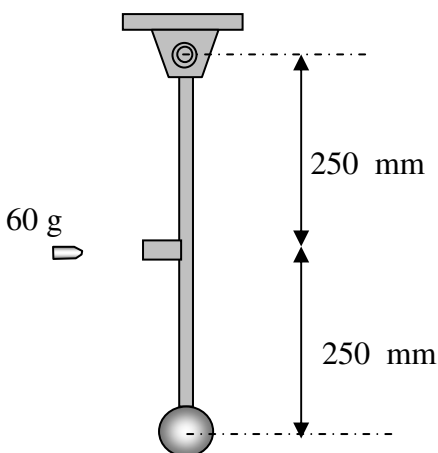
Ricordando che, per il sistema delle due auto, vale il principio della conservazione della quantità di moto si ha:

$$-1500 * 15 * \mathbf{i} + 1600 * 8,88 * \mathbf{j} = 3100 \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{1500 * 15}{3100} \mathbf{i} + \frac{1600 * 8,88}{3100} \mathbf{j} = -7,25 \mathbf{i} + 4,58 \mathbf{j}$$

l'energia cinetica persa nell'urto vale:

$$\Delta E = \frac{1}{2} 1500 * 15^2 + \frac{1}{2} 1600 * 8,88^2 - 3100 * \frac{1}{2} (7,25^2 + 4,58^2) = 117.848 J$$



Esempio 2

Una pallottola di massa 60 g viene sparata con velocità pari 300 m/s su una barra sottile, con una massa all'estremità di 1,5 kg, articolata ad un punto fisso. Se il proiettile resta incastrato nella barra, trovare la velocità angolare di quest'ultima dopo l'impatto. Si trascuri la massa dell'asta.

Si applica il principio della conservazione del momento della quantità di moto. Il valore di H prima dell'impatto è semplicemente il momento della quantità di moto della pallottola rispetto al fulcro, dopo l'urto quello del sistema asta-pallottola. Si ha allora:

$$H_o^- = 0.060 * 300 * 0,25 = 4,5 \frac{kgm^2}{s} = (0,060 * 0,25^2 + 1,5 * 0,5^2) * \omega$$

$$\omega = 1,188 \text{ rad / s}$$

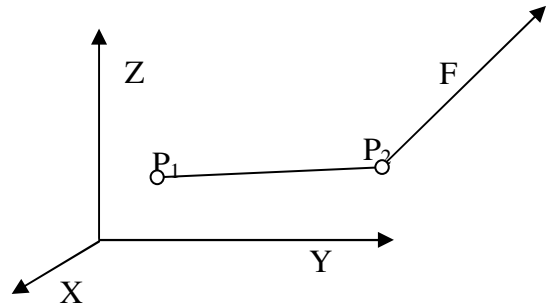
Si osservi che non si conserva la quantità di moto. Il motivo è che, in corrispondenza del vincolo, nasce una forza avente un ordine di grandezza simile a quello della forza impulsiva prodotta dal proiettile. L'impulso di questa forza non può più essere trascurato. Esso dà luogo quindi all'annullamento di una parte della quantità di moto lineare del sistema.

5.4 LAVORO ED ENERGIA.

Il lavoro di una forza si ottiene come prodotto scalare del vettore che rappresenta la forza per quello che rappresenta lo spostamento del punto di applicazione.

$$L = \mathbf{F} \circ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{F} \circ \Delta =$$

$$F_x \Delta_x + F_y \Delta_y + F_z \Delta_z$$



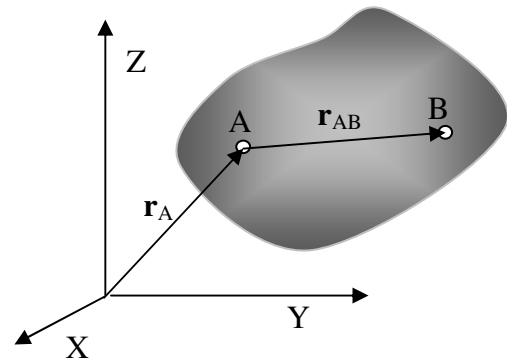
Nel caso in cui il punto di applicazione della forza si muova nella direzione della linea d'azione della forza stessa, il lavoro è rappresentato dal prodotto del modulo della forza per quello dello spostamento. Il lavoro ha un segno positivo quando la componente dello spostamento nella direzione della forza ha lo stesso verso della forza, un valore negativo quando ha verso opposto. Questo significa che la forza, nel primo caso produce lavoro durante lo spostamento del suo punto di applicazione, nel secondo caso ne assorbe.

Considerando un corpo rigido nello spazio al quale siano applicate delle forze esterne in punti definiti, il calcolo del lavoro complessivo compiuto dalle forze è facilitato, se si ricorda che per due punti generici A e B, si ha:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \text{ cioè'}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt} \times \mathbf{r}_{AB} \text{ quindi anche:}$$

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\vartheta \times \mathbf{r}_{AB}$$

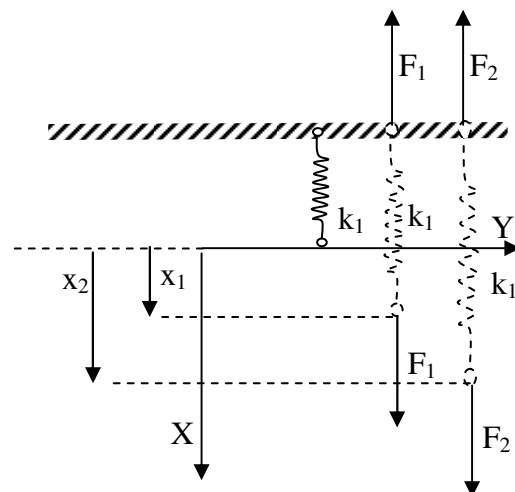


Il lavoro compiuto dalle forze agenti sul corpo ha l'espressione:

$$dL = \sum_i \mathbf{F}_i \circ d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \circ (d\mathbf{r}_A + d\vartheta \times \mathbf{r}_{AP_i}) =$$

$$\sum_i \mathbf{F}_i \circ d\mathbf{r}_A + \sum_i (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{AP_i}) \circ d\vartheta$$

E' semplice riconoscere che il primo termine dell'ultima espressione rappresenta lo spostamento del polo A, il secondo rappresenta il prodotto scalare del momento risultante del sistema di forze agenti rispetto ad A (nel caso fossero presenti delle coppie, queste vanno incluse nell'espressione del



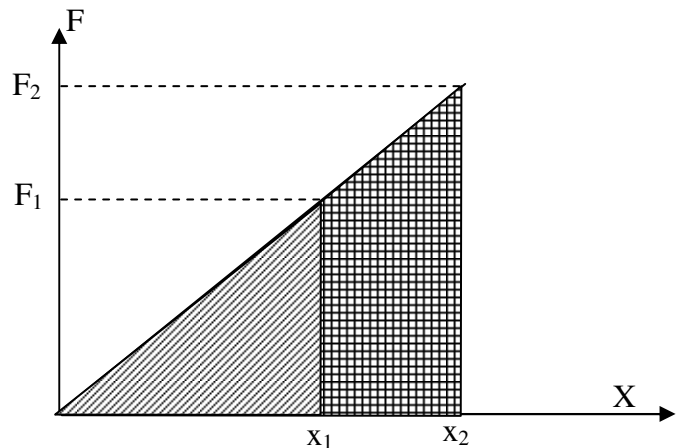
lavoro), per la rotazione del corpo. Se al corpo fosse applicata soltanto una coppia, il lavoro compiuto risulterebbe:

$$dL = C \circ d\vartheta$$

Se un corpo è deformabile, è il caso ad esempio delle molle, due forze interne eguali ed opposte possono compiere lavoro se varia la distanza tra i loro punti di applicazione. Nella figura a destra è rappresentato il caso generale di una molla, inizialmente precaricata con due forze eguali F_1 , a cui corrisponde un allungamento x_1 , che è poi caricata da due forze F_2 , maggiori delle precedenti, che provocano un allungamento x_2 . Il lavoro compiuto dalle forze F_2 nell'allungamento della molla da x_1 a x_2 vale:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Il lavoro compiuto può anche essere visualizzato nel diagramma forze-allungamenti riprodotto. Esso corrisponde all'area trapezoidale con tratteggio incrociato. Se invece consideriamo la prima estensione della molla, partendo da una situazione di allungamento nullo il lavoro è pari a $\frac{1}{2}kx_1^2$ e corrisponde all'area triangolare a tratteggio semplice.

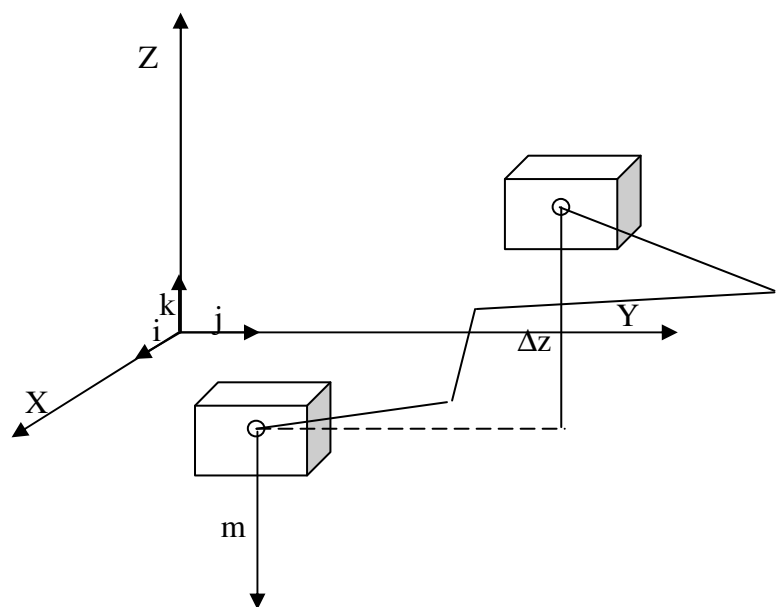


5.4.1 Energia potenziale.

Nei sistemi conservativi il lavoro compiuto da una forza per spostare il suo punto d'applicazione da una posizione ad un'altra è indipendente dal percorso seguito. In questo caso le forze possiedono un potenziale tale che:

$$-\frac{dU}{dr} = F \quad dU = -Fdr = -dL$$

La relazione precedente dice che la variazione differenziale del potenziale di una forza è eguale ma di segno contrario del lavoro compiuto dalla forza stessa durante uno spostamento infinitesimo. Un esempio di campo di forze a potenziale è quello delle forze di gravità. Sappiamo che lo spostamento di un corpo da una posizione ad un'altra può avvenire secondo infiniti percorsi, ma il lavoro compiuto dalla forza peso del corpo è funzione soltanto della posizione iniziale e di quella finale. Se ci riferiamo ad un sistema d'assi tridimensionale l'incremento dell'energia potenziale di gravità, ha l'espressione:



$$\Delta U = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix}$$

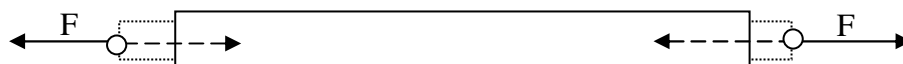
da questa relazione deriva che $\Delta U = mg\Delta z$, per cui lo spostamento di un corpo nello spazio provoca variazioni nella sua energia potenziale soltanto se varia la sua quota rispetto ad un piano di riferimento, parallelo al suolo.

La figura mostra ad esempio che, se un blocco è sollevato in modo che il suo baricentro segua un percorso rappresentato da una spezzata, la variazione della sua energia potenziale sarà $mg\Delta z$ e il lavoro compiuto dalla forza peso del blocco sarà $-mg\Delta z$ in quanto il punto di applicazione si sposta con verso contrario alla forza. Questo significa che l'incremento di energia potenziale di posizione viene compiuto a spese di un lavoro fornito dall'esterno.

5.4.2 Energia potenziale elastica.

Oltre all'energia potenziale di posizione dovuta al campo delle forze di gravità, è di particolare importanza quella che può essere immagazzinata all'interno di un corpo quando questo si deforma elasticamente. Tipico è il caso delle molle, ma qualunque corpo capace di deformazione elastica restituisce, in tutto o in parte, il lavoro speso per produrre quella deformazione. Ogni elemento materiale del corpo accumula una quota elementare d'energia di deformazione, in base al tipo di sollecitazione. Con riferimento ai tipi di sollecitazione elementare di trazione, torsione e flessione già descritti, si potranno scrivere le seguenti espressioni per le energie di deformazione nei vari casi:
Trazione:

Si tratta del caso più semplice perché una trave in trazione è sostanzialmente una molla. Ricordando che l'energia di deformazione di una molla è data da $\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$, nel caso di una barra in trazione si ha (vedi i casi di sollecitazione elementare descritti in precedenza):



$$U = (-)(-)\frac{1}{2}F\Delta x = \frac{1}{2}F * \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA}$$

Per chiarire il significato dei due segni meno prima dell'espressione dell'energia potenziale, si deve osservare che il lavoro a cui si fa riferimento è quello delle forze elastiche, opposte a quelle applicate dall'esterno e tratteggiate in figura. Poiché il loro punto di applicazione si sposta in senso opposto al loro verso, il lavoro compiuto dalle forze elastiche sarà negativo e l'energia potenziale accumulata positiva.

Torsione

Per analogia con il caso precedente.



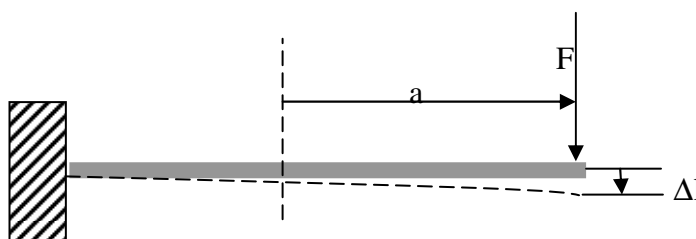
$$U = \frac{1}{2} M_i \Delta \vartheta = \frac{1}{2} \frac{M_i^2 l}{GJ_p}$$

in cui ricordiamo che l è la lunghezza della trave, G il modulo di elasticità tangenziale, J_p il momento d'inerzia polare della sezione. La formula scritta è valida solo per travi di sezione circolare.

Flessione

Nel caso della flessione si può scrivere ancora che l'energia potenziale elastica accumulata nella deformazione è eguale al lavoro speso per produrre la deformazione stessa, cioè :

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} \frac{F^2 l^3}{3EJ}$$



5.4.3 Energia cinetica

Mentre un punto materiale ha solo energia cinetica di traslazione, un corpo esteso possiede sia energia cinetica dovuta al moto di traslazione, sia a quello di rotazione. Si ricorda che non è sempre vero che in un moto di traslazione la traiettoria di tutti i punti del corpo deve essere rettilinea. Esistono moti di traslazione in cui il corpo, pur percorrendo una traiettoria curvilinea con tutti i suoi punti, non ruota. Per un corpo esteso l'energia cinetica può definirsi come somma delle energie cinetiche di tutti gli elementi di massa che contiene, cioè:

$$E = \int_M \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{1}{2} \int_M (\dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GP})^T (\dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) dm = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^T M \dot{\mathbf{r}}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T J_G \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2$$

L'ultima espressione indica che per un corpo rigido, nel moto più generale, l'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica di traslazione, che il corpo avrebbe se fosse concentrato nel baricentro, più quella di rotazione intorno ad un asse istantaneo, individuabile attraverso la conoscenza dello stato di moto.

Lavoro delle forze d'inerzia:

Consideriamo il lavoro delle forze e coppie d'inerzia per un corpo rigido:

$$L'_{1,2} = - \int_1^2 M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \circ d\mathbf{r} - \int_1^2 J \frac{d^2 \boldsymbol{\vartheta}}{dt^2} \circ d\boldsymbol{\vartheta} = - \int_1^2 M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \circ \dot{\mathbf{r}} \right) dt - \int_1^2 J \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} \right) dt =$$

$$-(E_2 - E_1) = E_1 - E_2$$

Il lavoro delle forze d'inerzia è quindi eguale all'incremento cambiato di segno dell'energia cinetica complessiva del corpo. Ricordando che il lavoro compiuto globalmente dalle forze e coppie attive e da quelle d'inerzia deve essere nullo, perché il sistema di forze complessivo è equilibrato, si ha:

$$L_{1,2} + L'_{1,2} = 0$$

$$L_{1,2} = -L'_{1,2} = E_2 - E_1$$

se dividiamo le forze dotate di potenziale da quelle non dotate di potenziale indicando con :

$L_{C,1,2}$, $L_{NC,1,2}$ le frazioni di lavoro da esse compiute ricordando che $L_{C,1,2} = -\Delta U$ si ha:

$$L_{NC,1,2} = \Delta U + \Delta E$$

Nel caso il sistema sia conservativo il primo termine dell'equazione precedente è nullo e si ha il principio di conservazione dell'energia:

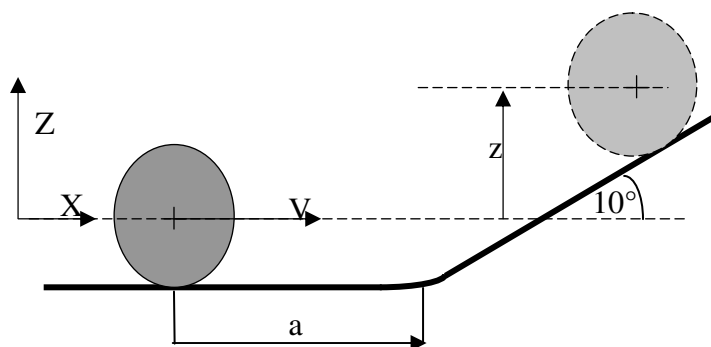
$$dL = -dU = dE$$

$$d(U + E) = 0$$

$$U + E = \text{cost}$$

Le relazioni scritte, valide per un sistema ideale nel quale si trascurino tutte le forze e coppie dissipative, esprimono il concetto che l'energia cinetica può aumentare o diminuire, dando luogo a corrispondenti diminuzioni o aumenti dell'energia potenziale. Il principio è di estrema utilità nella soluzione di molti problemi di Ingegneria.

Esempio:



Un disco omogeneo di massa pari a 10 kg e raggio $R=0,3$ m rotola senza strisciare, con velocità del suo centro pari a 15 m/s, su una guida piana, costituita da un tratto orizzontale, seguito da un tratto inclinato. Trascurando l'effetto dell'attrito volvente, calcolare a quale quota giungerà il centro del disco, nel momento in cui questo si fermerà, prima di ridiscendere verso il

basso.

Si farà ricorso al principio di conservazione dell'energia. Nella posizione iniziale il disco ha una velocità del suo centro V e una velocità angolare $\omega=V/R=15/0,3=50$ rad/s. La sua energia cinetica è la somma dell'energia cinetica di traslazione, più quella dovuta alla rotazione. L'energia totale nel punto iniziale considerato, per il quale si assume che la quota di riferimento per l'energia potenziale sia quella del baricentro della ruota, sarà quindi puramente cinetica, mentre nel punto finale il disco sarà fermo e avrà solo energia potenziale. Si ha allora:

$$E = \frac{1}{2} M * V^2 + M * \frac{R^2}{2} * \omega^2 = Mgz$$

$$\frac{\frac{1}{2} * 10 * 15^2 + 10 * \frac{0,3^2}{2} * 50^2}{10 * 9,81} = z = 22,94 \text{ m}$$

In questo caso l'energia cinetica di rotazione e quella di traslazione hanno espressioni particolarmente semplici poiché il disco ruota intorno ad un singolo asse e trasla in un'unica direzione. Si può tener conto dell'attrito volvente osservando che esso introduce una forza resistente data da $f_v * Mg$ essendo $f_v = u/R$ il coefficiente di attrito volvente. Assumendo un coefficiente di attrito volvente pari a 0,1 la pendenza della rampa pari a 10° e la distanza della posizione iniziale della ruota dall'inizio della rampa di 3m si ha:

$$\Delta E = -\Delta U + \Delta L$$

$$-\frac{1}{2}M * V^2 + M * \frac{R^2}{2} * \omega^2 = -Mgz - f_v Mg(a + \frac{z}{\sin \alpha})$$

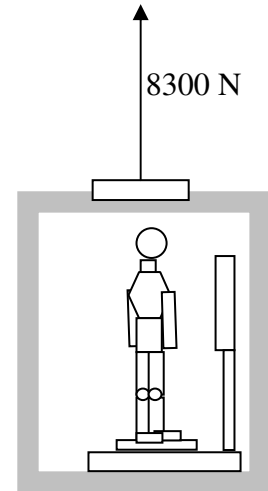
$$\Delta E = \frac{1}{2}M * V^2 + M * \frac{R^2}{2} * \omega^2 - 0,1 * 10 * 9,81 * 3 = 10 * 9,81 z (1 + \frac{0,1}{\sin \alpha})$$

$$\frac{\frac{1}{2} * 10 * 15^2 + 10 * \frac{0,3^2}{2} * 50^2 - 0,1 * 10 * 9,81 * 3}{10 * 9,81 (1 + \frac{0,1}{\sin 10})} = z = 20,57 m$$

5.5 ESERCIZI

Equilibrio dinamico

D.1 Una persona di massa pari a 75 kg sta in piedi sopra una bilancia all'interno di un ascensore. Durante i primi 3 s del moto a partire dalla quiete la tensione dei cavi è pari a 8300 N. Trovare il valore in N letto sulla bilancia in questo intervallo di tempo e la velocità verso l'alto dell'ascensore alla fine dei 3 s. La massa totale del sistema, ascensore, persona e bilancia è pari a 750 kg. R. $P=830$ N, $v = 3,77$ m/s.



Soluzione.

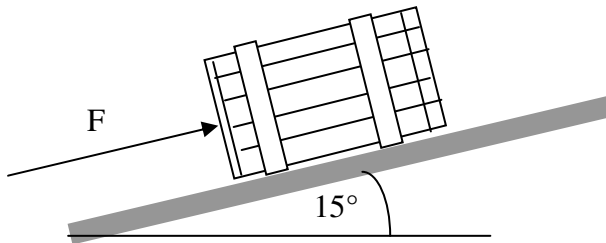
La forza esercitata dal cavo è eguale alla somma dei pesi sospesi e delle forze d'inerzia, si ha cioè:

$$8300 = 750 \cdot (a + g)$$

$$a = 1,27 \text{ m/s}^2$$

la velocità dopo 3s e l'indicazione della bilancia in N si ottengono dalle relazioni:

$$v = 1,27 \cdot 3 = 3,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$P = 75 \cdot (g + 1,27) = 830 \text{ N}$$

D.2 La cassa del peso di 50 kg è ferma quando viene applicato il carico. Determinare l'accelerazione della cassa quando $F = 0$, $F = 150$ N e $F = 300$ N. Il coefficiente d'attrito di primo distacco $f_s = 0,20$, quello durante lo scorrimento della cassa $f = 0,15$.

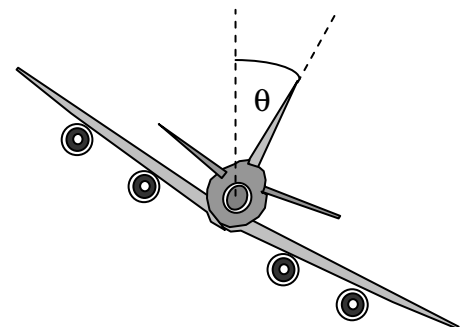
Soluzione.

Per $F = 0$ si ha $15^\circ > \varphi_a = \text{atan}(0,2) = 11,31^\circ$. La cassa tenderà quindi a muoversi verso il basso con accelerazione pari a $\frac{P \sin(15^\circ) - f \cdot P \cos(15^\circ)}{50} = 1,12 \text{ m/s}^2$. Per gli altri valori di F si ha:

$$\frac{-150 - 0,15 \cdot P \cos(15^\circ) + P \sin(15^\circ)}{50} = -1,88 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{-300 - 0,15 \cdot P \cos(15^\circ) + P \sin(15^\circ)}{50} = -4,88 \text{ m/s}^2$$

Determinare il corretto angolo θ per un velivolo che vola a 600 km/h e compie una virata con raggio di 3 km. Si noti che la forza di portanza esercitata dall'aria sulle ali è normale alle superfici di queste. R. $\theta = 43,3^\circ$.



Soluzione.

Le tre forze che agiscono sul baricentro del velivolo sono il peso in direzione verticale verso il basso, la forza centrifuga

diretta verso l'esterno della traiettoria e di modulo $m \frac{v^2}{R}$ e la forza di portanza diretta perpendicolarmente alle superfici alari. Il valore dell'inclinazione si determina imponendo le equazioni di equilibrio in direzione orizzontale e verticale:

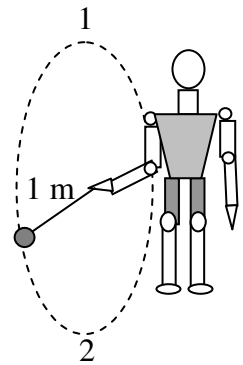
$$L \cos \vartheta - P = 0$$

$$L \sin \vartheta - \frac{mv^2}{R} = 0$$

dividendo:

$$\cot \vartheta = \frac{P}{\frac{mv^2}{R}} = \frac{g * R}{v^2} = \frac{9,81 * 3000}{\left(\frac{600}{3,6}\right)^2} = 1,06 \quad \vartheta = 43,3^\circ$$

D.3 Un ragazzo fa ruotare una palla di massa 50 g attaccata ad un filo di 1 m di lunghezza in modo tale che la palla tracci un cerchio nel piano verticale come mostrato in figura. Qual è la minima velocità che deve avere la palla nella posizione 1? Se questa velocità è mantenuta costante durante tutto il giro calcolare la tensione T del filo nel punto 2.



Soluzione.

La minima velocità della palla nel punto 1 deve essere sufficiente a generare una forza centrifuga che equilibri il peso della palla. Si ha quindi:

$$\frac{m * v^2}{R} = m * g \quad v = \sqrt{g * R} = \sqrt{9,81 * 1} = 3,13 \text{ m/s}$$

Nel punto 2 la tensione del filo è pari a due volte il peso della palla, cioè:

$$T_2 = 2 * 0,050 * 9,81 = 0,981 \text{ N}$$

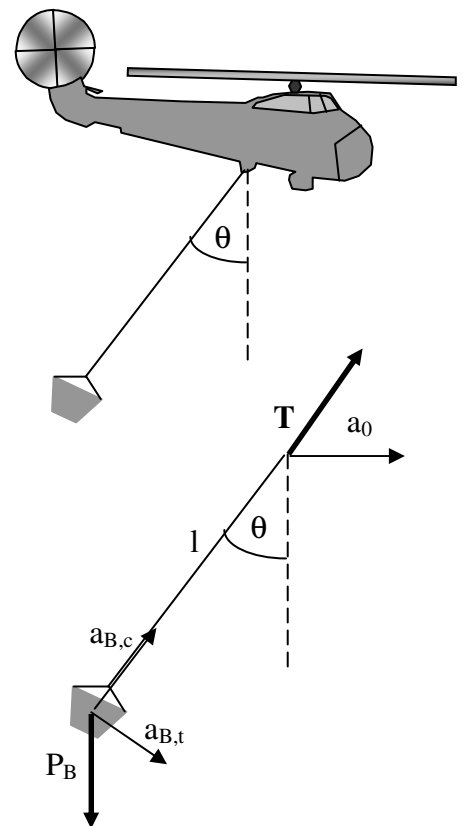
D.4 Un elicottero antincendio staziona sopra un lago dove riempie il suo secchio d'acqua. Quindi si solleva lentamente e inizia un volo orizzontale, sostanzialmente da fermo, con un'accelerazione orizzontale a_0 . Si ottenga un'espressione di θ per la quale $\dot{\theta}$ è massimo. Determinare anche la tensione T nel cavo come funzione di θ e della massa del secchio riempito. R.

$$\theta = 45^\circ, T = P \cos \vartheta + \frac{P}{g} \dot{\vartheta}^2 r$$

Soluzione.

In corrispondenza del secchio nasceranno due accelerazioni, la prima tangenziale $a_{B,t}$, la seconda centripeta $a_{B,c}$. Le espressioni delle accelerazioni sono le seguenti:

$$a_{B,c} = \dot{\vartheta}^2 l \quad a_{B,t} = a_0 \cos \vartheta - \ddot{\vartheta} l$$



Scrivendo le equazioni di equilibrio del secchio nella direzione del cavo di sospensione e nella direzione normale si ha:

$$T = m\dot{\vartheta}^2 l + P \cos \vartheta \quad P \sin \vartheta - m_B a_{B,t} =$$

$$= P \sin \vartheta - m(a_0 \cos \vartheta - \ddot{\vartheta} l) = 0$$

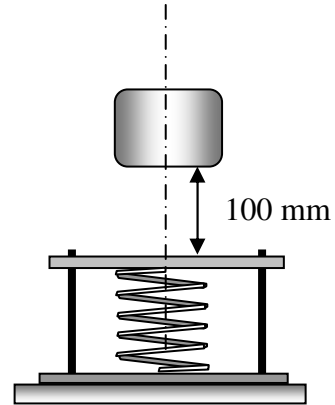
$$\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} \sin \vartheta - \frac{a_0}{l} \cos \vartheta$$

Perché $\dot{\vartheta}$ sia massimo dovrà essere $\ddot{\vartheta} = 0$ quindi:

$$\tan \vartheta = \frac{a_0}{g} \quad \text{per} \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_{Max}$$

Energia potenziale elastica

D.5 cilindro di 6 kg viene rilasciato da una posizione di riposo e cade sulla molla che è stata precaricata inizialmente con una corsa di 50 mm mediante il piattello vincolato mostrato in figura. Se la rigidezza della molla è 4 kN/m calcolare la compressione addizionale della molla provocata dalla caduta del cilindro, prima che questo rimbalzi.



R. $\delta = 29,4 \text{ mm}$

Soluzione

Trascurando le azioni dissipative l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla nell'istante di massima compressione è data dall'espressione:

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{0,05^2}{2} \right) = 6 * 9,81 * (0,1 + x_2 - 0,05)$$

da cui si trae:

$$4000x_2^2 - 117,7x_2 - 15,89 = 0 \quad x_2 = 0,0794 \text{ m} \quad \delta = 0,0794 - 0,05 = 0,0294 \text{ m} =$$

$$= 29,4 \text{ mm}$$

Urto

D.6 Un palo di 500 kg e' spinto da una mazza di 800 kg che cade da 3 m sull'estremità' del palo. Il palo avanza di 6 mm e non si ha rimbalzo. Trovare la resistenza opposta alla penetrazione del palo, assunta costante, e l'energia dissipata nella deformazione della cima del palo.

Soluzione.

Osserviamo che la quantità di moto finale della mazza è nulla mentre quella posseduta dalla mazza un istante prima di colpire il palo è :

$$Q_1 = 500 * \sqrt{2 * 9,81 * 3} = 3836 \frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}}$$

La quantità di moto posseduta dalla mazza viene trasferita al sistema mazza-palo che acquista una velocità al momento dell'impatto derivabile dalla relazione:

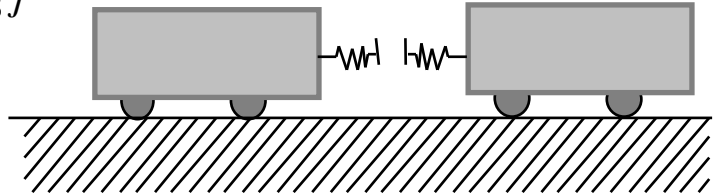
$$Q_1 = (m_p + m_m)v_2 \quad v_2 = \frac{3836}{(500 + 800)} = 2,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'energia cinetica posseduta dal sistema mazza-palo si trasforma in lavoro della forza resistente per cui si ha.

$$\frac{1}{2} * 1300 * 2,95^2 = R * 0,006 \quad \text{da cui} \quad R = 942.771 \text{ N}$$

l'energia cinetica persa durante l'impatto è uguale a quella posseduta dalla mazza meno quella posseduta dal sistema mazza-palo subito dopo l'impatto cioè:

$$\Delta E = \frac{1}{2} * 500 * 7,67^2 - \frac{1}{2} * 1300 * 2,95^2 = 9058 \text{ J}$$



D.7 Il respingente all'estremità' di un carro ferroviario ha una rigidità di 0,7 MN/m e si impegna con un respingente identico di un altro carro. Il primo carro ha una massa di 10000 kg e una velocità di 1.8 m/s , il secondo ha una massa di 15000 kg e una velocità di 0.6 m/s nella stessa direzione.

Trovare :

- La velocità con cui i carri si muovono durante l'impatto.
- L'energia cinetica perduta dal sistema dei due carri nella fase d'impatto e la compressione di ciascun respingente per immagazzinarla.
- La velocità di ciascun carro alla separazione se solo metà dell'energia immagazzinata è restituita.

Soluzione.

Si applicherà il principio di conservazione della quantità di moto. Inizialmente, prima del contatto, si ha:

$$Q_1 = 10000 * 1,8 + 15000 * 0,6 = 27000 \text{ kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Poiché la quantità di moto del sistema dei due carri resta costante se non esistono forze esterne al sistema che ne provochino la variazione, considerando l'istante in cui i respingenti subiscono la massima compressione e i due carri hanno la stessa velocità, si ha:

$$v_2 = \frac{Q_1}{m_1 + m_2} = \frac{27000}{25000} = 1,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'energia cinetica persa è:

$$\Delta E = \frac{1}{2} * (10000 * 1,8^2 + 15000 * 0,6^2) - \frac{1}{2} * 25000 * 1,08^2 = 4320 \text{ J}$$

Poiché la rigidità di un respingente è 0,7 MN/m la rigidità complessiva dei due respingenti in serie e la compressione complessiva delle due molle sono:

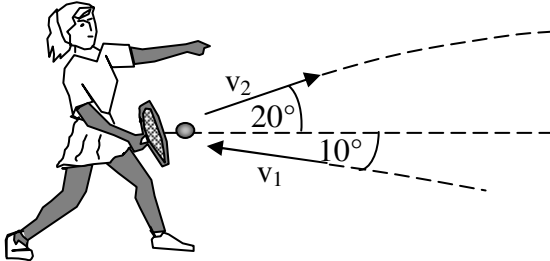
$$K_{tot} = \frac{(0,7 * 10^6)^2}{1,4 * 10^6} = 350.000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \frac{1}{2} * 350.000 * \delta^2 = 4320$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4320}{175.000}} = 0,157 \text{ m}$$

La compressione di ciascun respingente è pari a $\delta/2$. Una volta raggiunta la massima compressione dei respingenti, l'energia elastica in essi immagazzinata viene restituita nella misura del 50 % ai carri. Quello che si trova davanti viene accelerato dalla velocità v_2 comune dei due carri alla velocità $v_2 + \Delta v$, quello che si trova dietro viene portato alla velocità $v_2 - \Delta v$. Si ha anche:

$$\frac{1}{2} 4320 = \frac{1}{2} (m_2 - m_1) \Delta v^2 \quad \Delta v = \sqrt{\frac{4320}{5000}} = 0,93 \frac{m}{s}$$

Il carro anteriore alla separazione avrà quindi la velocità di 2,01 m/s, quello posteriore di 0,15 m/s.



D.8 Una tennista colpisce la palla con la racchetta mentre la palla sta ancora salendo. La velocità della palla prima del colpo è $v_1 = 15$ m/s e dopo il colpo è $v_2 = 22$ m/s con la direzione mostrata in figura. Se la palla di 60 g. è in contatto con la racchetta per 0,05 s, determinare il modulo della forza media scambiata e l'angolo che essa forma con l'orizzontale. R. $F = 43$ N , $\alpha = 8,68^\circ$

l'angolo che essa forma con l'orizzontale. R. $F = 43$ N , $\alpha = 8,68^\circ$

Soluzione.

Ricordiamo che tra la forza agente sulla palla durante l'impatto e la sua quantità di moto sussiste la relazione

$$\int_0^t \mathbf{F} dt = \int_0^t \frac{d\mathbf{Q}}{dt} dt = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$$

Se ammettiamo che la forza scambiata durante l'impatto sia costante e che la durata dell'impatto sia pari a 0,05 s , scomponendo la relazione precedente in due relazioni scalari nelle direzioni orizzontale e verticale si ha:

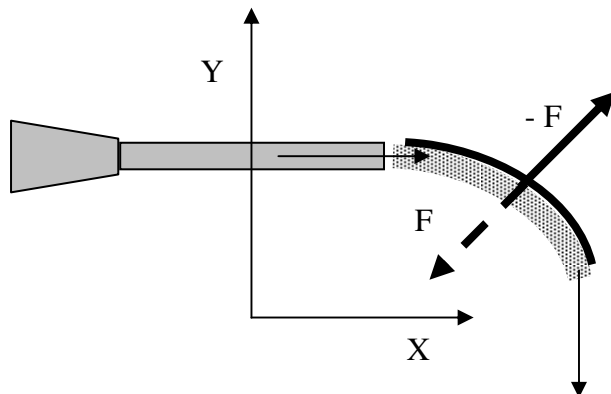
$$F_x = 0,06 * \frac{(22 * \cos(20) + 15 * \cos(10))}{0,05} = 42,5 \text{ N}$$

$$F_y = 0,06 * \frac{(22 * \sin(20) - 15 * \sin(10))}{0,05} + 0,06 * 9,81 = 6,48 \text{ N}$$

$$\alpha = \text{atn}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 8,67^\circ \quad F = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2)} = 43 \text{ N}$$

L'esercizio si può risolvere facilmente ricorrendo a una semplice costruzione grafica, consistente nel tracciare due vettori in scala corrispondenti alle quantità di moto della palla prima e dopo l'impatto e fare la differenza dei due vettori dividendo poi questa differenza per la durata dell'impatto. Si lascia al lettore questo esercizio.

D.9 Un getto d'acqua di portata 30 kg/s e velocità 40 m/s incide su una paletta avente un profilo corrispondente a un quarto di circonferenza. Il getto fuoriesce con la stessa velocità ma in direzione verticale dalla paletta. Calcolare la spinta del getto sulla pala.



Soluzione.

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un getto d'acqua che subisce una variazione della sua quantità di moto, soltanto in direzione e non in modulo. Nell'unità di tempo la quantità di moto entrante nella paletta ha la direzione orizzontale e vale:

$$Q_x = 30 * 40 = 1200 \text{ kg} \frac{m}{s}$$

quella uscente è diretta secondo y e vale :

$$Q_y = -30 * 40 = -1200 \text{ kg} \frac{m}{s}$$

Utilizzando la relazione che lega le componenti della quantità di moto alle componenti della spinta (vedi l'esercizio precedente) , si ottiene:

$$F_x = \frac{0 - Q_x}{1} = -1200 \frac{\text{kgm}}{s} * \frac{1}{s} = -1200 \text{ N}$$

$$F_y = \frac{Q_y - 0}{1} = -1200 \frac{\text{kgm}}{s} * \frac{1}{s} = -1200 \text{ N}$$

E' molto importante osservare che le componenti ricavate sono quelle che la paletta trasmette alla porzione di massa d'acqua con cui viene a contatto nell'unità di tempo. Si tratta di una forza agente in direzione diagonale, rappresentata dal vettore tratteggiato in figura, di modulo:

$$F = 1200 * \sqrt{2} = 1692 \text{ N}$$

La forza $-F$ trasmessa dall'acqua alla pala è invece un vettore uguale in modulo e opposto in direzione al vettore precedente. E' rappresentato in figura con linea continua.



D.10 L'auto B è inizialmente ferma ed è colpita dall'auto A che si muove con velocità v . La massa della macchina B è pm , dove m è la massa della macchina A e p è una costante

positiva. Se il coefficiente di restituzione è $e = 0,1$ trovare le espressioni delle velocità delle due vetture dopo la collisione, in funzione di p e v . Si valutino le espressioni trovate per $p = 0,5$

Soluzione.

Applicando le relazioni:

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - em_2)v_1^- + m_2(1+e)v_2^-}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - em_1)v_2^- + m_1(1+e)v_1^-}{m_1 + m_2}$$

Si ottiene

:

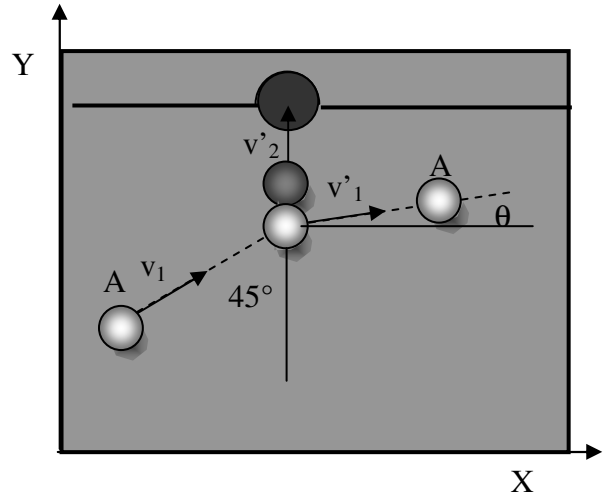
$$v_1^+ = \frac{(1-0,1p)v}{(1+p)} \quad v_2^+ = \frac{(1,1)v}{(1+p)}$$

per $p = 0,5$

$$v_1^+ = \frac{(1-0,1*0,5)v}{(1,5)} = 0,63v \quad v_2^+ = \frac{(1,1)v}{(1,5)} = 0,73v$$

D.11 Nel gioco del biliardo la palla A deve colpire di striscio il pallino nella posizione mostrata in figura per mandarla nella buca con la velocità v'_2 . La palla A ha una velocità v_1 prima dell'impatto e una velocità v'_1 dopo l'impatto. Il coefficiente di restituzione è 0,9. Ambedue le palle hanno la stessa massa e lo stesso diametro. Calcolare l'angolo di rimbalzo θ e la frazione di energia cinetica che viene persa in seguito all'impatto.

R. $\theta = 2,86^\circ$, $\Delta E/E = 0,0475$



Soluzione.

Per risolvere il problema è necessario estendere le leggi dell'urto, come le abbiamo conosciute sino ad ora, al caso in cui le velocità dei due corpi che entrano in collisione cambiano anche in direzione oltre che in modulo. Se osserviamo che, durante l'urto, la forza mutua che nasce alla collisione è diretta secondo Y, deduciamo che possiamo ancora applicare la legge di conservazione della quantità di moto alla direzione Y, scrivendo:

$$v_1 \sin(45) = v'_1 \sin(\vartheta) + v'_2$$

Nella direzione X non nascono forze di collisione pertanto la legge di conservazione della quantità di moto vale per la singola palla. Per la palla A si ha quindi:

$$v_1 \cos(45) = v'_1 \cos(\vartheta)$$

Infine possiamo applicare, sempre in direzione y la legge che esprime il coefficiente di restituzione in funzione delle velocità ottenendo:

$$e = -\frac{v'_1 \sin(\vartheta) - v'_2}{v_1 \sin(45)} = 0,9$$

Le relazioni precedenti risolvono il problema poiché si ottiene:

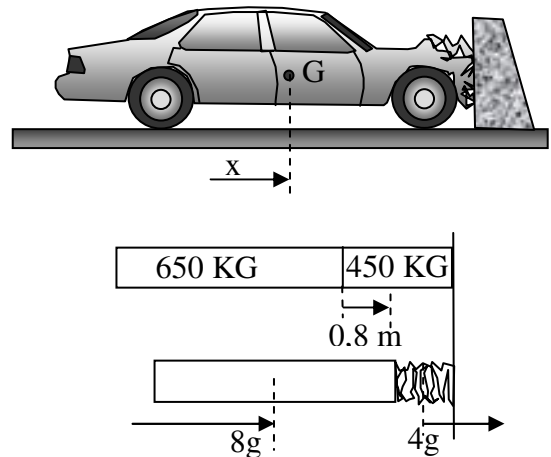
$$v_1' \sin(\vartheta) + v_2' = v_1 \sin(45) \quad v_1' \sin(\vartheta) - v_2' = -0,9 * v_1 \sin(45)$$

$$2v_1' \sin(\vartheta) = 0,1 * v_1 * \sin(45) \quad v_1' \cos(\vartheta) = v_1 \cos(45)$$

$$2 * \tan(\vartheta) = 0,1 \quad \vartheta = 2,86^\circ \quad v_1' = \frac{0,1 * v_1 * \sin(45)}{2 \sin(\vartheta)} = 0,708 v_1$$

$$v_2' = v_1' \sin(\vartheta) + 0,9 * v_1 \sin(45) = 0,671 * v_1 \quad \frac{\Delta E}{E} = 1 - 0,671^2 + 0,708^2 = 0,049$$

D.12 La macchina per prove di collisione della figura viene mostrata dopo un esperimento nel quale la velocità della vettura all'impatto era di 38,9 km/h. La massa della vettura era di 1100 kg e il suo frontale si accorcia nell'urto di 0,8 m. Si calcoli la forza media scambiata con l'ostacolo durante l'urto. Poiché la barriera è immobile, come prima approssimazione si consideri l'auto formata da due parti. La parte non danneggiata trasla di 0,8 m durante l'urto con una decelerazione media di 8g. La parte danneggiata ha una massa di 450 kg e la sua decelerazione è di 4g. Determinare la forza scambiata durante l'urto, analizzando le due parti separatamente e trovare la perdita d'energia durante l'urto. Si consideri prima di tutto che la parte anteriore della vettura ha un'accelerazione media di 8g, quindi per passare dalla velocità di $38,9/3,6 = 10,8$ m/s alla velocità nulla impiega:



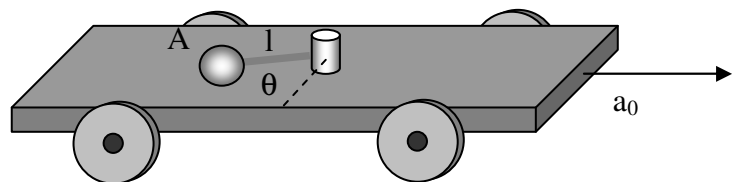
$$t = \frac{10,8}{4g} = 0,28 \text{ s}$$

Durante l'urto la parte anteriore della vettura è soggetta alla forza trasmessa dall'ostacolo rivolta verso la parte posteriore e alla forza d'inerzia della parte posteriore, eguale a $650 * 8 * 9,81 = 51012$ N. Scrivendo che la variazione della quantità di moto è eguale all'impulso delle forze esterne agenti, si ha:

$$Q_2 - Q_1 = 0 - 450 * 10,8 = (650 * 8 * 9,81 - F_c) * 0,28 = 6,84 * 10^4 \text{ N}$$

Moto relativo

D.13 La sfera A di massa 10 kg è attaccata all'asta di lunghezza $l = 0,8$ m in figura. La massa del carrello da solo è di 250 kg ed esso si muove con un'accelerazione a_0 . Se $\dot{\vartheta} = 3 \text{ rad/s}$ quando $\theta = 90^\circ$, trovare



l'energia cinetica del sistema se il carrello ha una velocità di 0,8 m/s 1) nella direzione di a_0 e 2) in direzione opposta ad a_0 . Si consideri la palla come un punto materiale. R. $E_1 = 112 \text{ J}$ $E_2 = 112 \text{ J}$

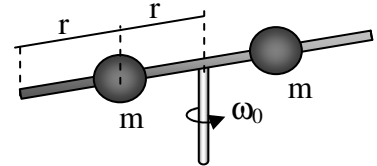
Soluzione.

La velocità relativa della sfera è perpendicolare alla direzione di marcia del carrello e vale in modulo $v = \dot{\vartheta} l = 3 * 0,8 = 2,4 \frac{m}{s}$. La velocità assoluta nasce dalla composizione della velocità di trascinamento, di modulo 0,8 m/s e della velocità relativa. Il modulo della velocità assoluta della

sfera è quindi $v_A = \sqrt{0,8^2 + 2,4^2} = 2,53 \frac{m}{s}$ sia nel caso 1) che nel caso 2) . Nell'uno e nell'altro caso l'energia cinetica vale $J_1 = J_2 = \frac{1}{2} * (250 * 0,8^2 + 10 * 2,53^2) = 112 J$

Conservazione del momento angolare

D.14 Le due sfere di massa eguale possono anche scorrere lungo la guida radiale. Se esse sono inizialmente poste alla distanza r dall'asse di rotazione con il sistema rotante con velocità angolare ω_0 , trovare il nuovo valore della velocità angolare dopo che le sfere vengono rilasciate e si portano al raggio $2r$. Trovare anche la frazione d'energia cinetica che viene persa in questa operazione. Si trascuri la piccola porzione di energia cinetica posseduta dalle aste. R. $\omega = \omega_0/4$, $\Delta E/E = 0,75$



Soluzione.

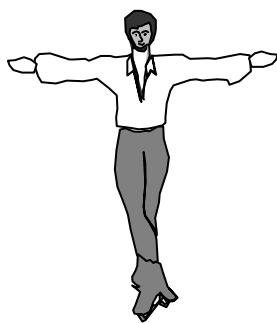
Vale il principio di conservazione del momento angolare per cui si ha:

$$J_1 \omega_0 = J_2 \omega_2 \quad \text{con } J_1 = 2m * r^2 \quad J_2 = 2m * 4r^2 = 8mr^2$$

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \omega_0 = \frac{\omega_0}{4}$$

La perdita relativa di energia cinetica vale:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}(J_0 \omega_0^2 - J_1 \omega_1^2)}{\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2} = \frac{(2mr^2 - \frac{8mr^2}{16})}{2mr^2} = 0,75$$



D.15 Un pattinatore di massa pari a 74 kg piroetta con le braccia aperte intorno al suo asse con una velocità angolare di 1 giro/s. Calcolare la velocità angolare se il pattinatore porta le braccia aderenti al corpo, con le mani vicine all'asse mediano del corpo stesso. Come ragionevole approssimazione si modellino le braccia come aste snelle uniformi, ciascuna delle quali ha massa 7kg e 680 mm di lunghezza. Si modelli il torso come un cilindro uniforme di massa 60 kg e diametro 330 mm, si consideri l'uomo con le braccia aderenti al corpo come un cilindro uniforme di 74 kg e diametro 330 mm. Si trascuri l'attrito.

Soluzione

Si ricordi anzitutto che il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo è $\frac{Mr^2}{2}$. Per il torso si ha

quindi $J_t = \frac{60 * 0,165^2}{2} = 0,817 kgm^2$. Per le braccia bisogna prima calcolare il momento d'inerzia

rispetto ad un asse baricentrico e quindi applicare il teorema di trasposizione dei momenti d'inerzia. Si ha allora ricordando le tabelle delle proprietà d'inerzia in altra parte di questo testo:

$$J_{bG} = \frac{Ml^2}{12} = \frac{7 * 0,68^2}{12} = 0,270 kgm^2 \quad J_{b0} = J_G + M(\frac{l}{2} + 0,165)^2 = 0,292 kgm^2$$

Il momento d'inerzia complessivo con le braccia allargate è quindi :

$$J_{tb} = J_t + 2 * J_{i0} = 0,817 + 2 * 0,292 = 1,401 \text{ kgm}^2$$

Se le braccia sono aderenti al torso il momento d'inerzia è invece:

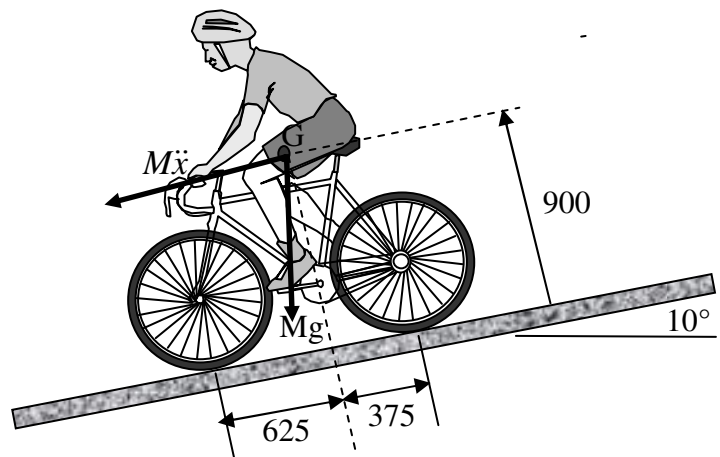
$$J'_{tb} = \frac{74 * 0,165^2}{2} = 1,00 \text{ kgm}^2$$

Per la conservazione del momento angolare si ha quindi:

$$J'_{tb} \omega' = J_{tb} * 1 \quad \omega' = \frac{J_{tb}}{J'_{tb}} * 1 = 1,401 \text{ giri / s}$$

Equilibrio dinamico

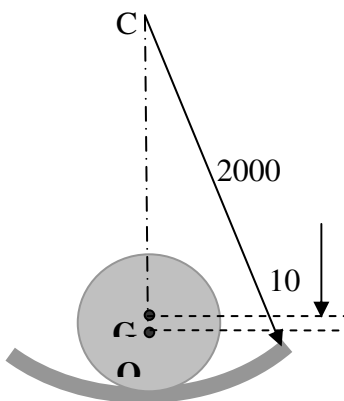
D.16 Il ciclista frena durante la discesa su un pendio inclinato di 10° . Quale decelerazione potrebbe causare la possibilità di ribaltamento in avanti, intorno alla ruota anteriore? Il baricentro dell'intero sistema ciclista più bici è in G. R. 0,510 g



Soluzione

Nel baricentro del sistema ciclo-ciclista sono applicate la forza peso, verticale e diretta verso il basso, di modulo Mg e la forza d'inerzia diretta secondo la direzione di marcia della bici, di modulo $M\ddot{x}$. In caso di incipiente ribaltamento la reazione vincolare sulla ruota posteriore viene a mancare per cui scrivendo l'equazione di equilibrio dinamico alla rotazione rispetto al punto di contatto della ruota anteriore col terreno si ha:

$$-Mg * \cos(10) * 0,625 + (M\ddot{x} + Mg * \sin(10)) * 0,9 = 0 \quad \ddot{x} = g * \frac{(\cos(10) * 0,625 - 0,9 * \sin(10))}{0,9} = 0,51g$$



D.17 Il baricentro del disco di massa 10 kg e raggio 150 mm è fuori asse di 10 mm. Se G è nella posizione indicata in figura quando la ruota rotola senza strisciare sul fondo della guida, con velocità angolare di 10 rad/s, calcolare la forza P scambiata tra la ruota e la guida. R P = 100,3 N

Soluzione.

Per calcolare l'accelerazione del punto O è richiesta l'accelerazione di O che percorre una traiettoria circolare intorno a C con velocità angolare:

$$\omega_1 = \frac{10 * 0,15}{1,85} = 0,811 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

L'accelerazione di O è quindi puramente centripeta, diretta da O verso C e di modulo $a_o = 0,811^2 * 1,85 = 1,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. L'accelerazione di G è la somma di quella di O e dell'accelerazione nel moto relativo di G rispetto ad O:

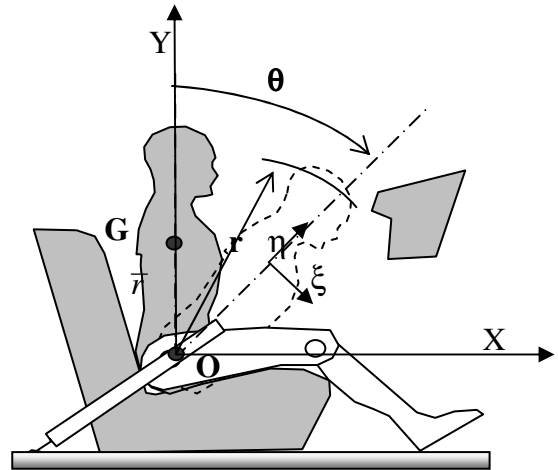
$$a_G = 1,22 - 10^2 * 0,01 = 0,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La forza esercitata dal disco sulla guida è quindi uguale al peso del disco meno la forza d'inerzia del disco, cioè:

$$F = -P - 0,22 * 10 = 98,1 + 2,2 = 100,3 N$$

Si osservi che l'accelerazione del baricentro del disco è rivolta verso l'alto, quindi la forza d'inerzia del disco si somma alla sua forza peso.

D.18 In uno studio del danno fisico durante l'impatto della testa contro il pannello della strumentazione durante arresti improvvisi o incidenti, nel quale vengono usate cinture alla vita senza passanti sul torace, viene analizzato il modello umano della figura. L'anca viene assunta come fissa rispetto alla macchina e il torso sopra l'anca viene considerato come un corpo rigido di massa m ruotante liberamente intorno ad O . Il centro di gravità del torso è G con il segmento OG verticale al momento dell'impatto. Il raggio d'inerzia del torso intorno ad O sia k_0 . Se la vettura si arresta bruscamente con una decelerazione costante a , determinare la velocità v relativa alla macchina con cui la testa del modello colpisce il pannello degli strumenti.



Si considerino i valori $m = 50 \text{ kg}$ $\bar{r} = 450 \text{ mm}$ $r = 800 \text{ mm}$, $k_0 = 550 \text{ mm}$, $\theta = 45^\circ$, $\alpha = 10g$, e si calcoli v . R. $v = 11,49 \text{ m/s}$.

Soluzione.

L'accelerazione nel baricentro, necessaria per calcolare la forza d'inerzia è data dall'espressione: $\mathbf{a}_G = a_0 \mathbf{i} - \vartheta \bar{r} \boldsymbol{\lambda}$ dove \mathbf{i} e $\boldsymbol{\lambda}$ sono i versori degli assi X e ξ . L'equazione d'equilibrio dinamico alla rotazione intorno al punto O è:

$$J_G \ddot{\vartheta} - ma_0 \bar{r} \cos \vartheta + m \bar{r}^2 \ddot{\vartheta} = 0$$

L'equazione scritta contiene la coppia d'inerzia dovuta alla presenza di un'accelerazione angolare, e il momento rispetto al punto O della forza d'inerzia applicata nel baricentro $-ma_G$. E' facile vedere che $J_G + m \bar{r}^2 = J_O$ quindi l'equazione precedente assume la forma:

$$J_O \ddot{\vartheta} = ma_0 \bar{r} \cos \vartheta$$

Integrando l'espressione di $\ddot{\vartheta}$ che si ottiene dall'equazione precedente, si ha:

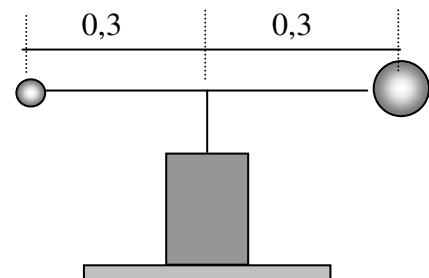
$$\int_0^{45} \ddot{\vartheta} d\vartheta = \int_0^t \ddot{\vartheta} * \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 = \int_0^{45} ma_0 \bar{r} \frac{\cos \vartheta}{J_O} d\vartheta = \frac{ma_0 \bar{r} \sin 45}{J_O} \quad \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{ma_0 \bar{r} \sin 45}{J_O}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 * 50 * 10 * 9,81 * 0,45 * \sin 45}{50 * 0,55^2}} = 14,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocità d'impatto sul cruscotto sarà quindi:

$$v = 14,36 * 0,8 = 11,49 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

D.19 Una barra di 0,6 m di lunghezza è posta in rotazione nel suo punto medio da un albero collegato ad un motore . La barra, di massa trascurabile, porta alle sue estremità due sfere di massa 3 e 2 kg. I centri delle sfere distano 0,3 m dall'asse di rotazione. Determinare la forza orizzontale che grava sui cuscinetti quando la barra è posta in rotazione da una coppia di 10Nm.



Soluzione.

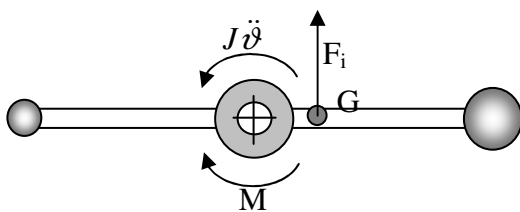
Il momento d'inerzia delle due masse rispetto all'asse di rotazione è uguale a $J_0 = 3 \cdot 0,3^2 + 2 \cdot 0,3^2 = 0,45 \text{ kgm}^2$. L'equazione di equilibrio dinamico alla rotazione è:

$$0,45 \cdot \ddot{\vartheta} = 10 \quad e \quad \ddot{\vartheta} = \frac{10}{0,45} = 22,22 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Il baricentro del sistema delle due masse si trova alla distanza dall'asse di rotazione data dalla relazione:

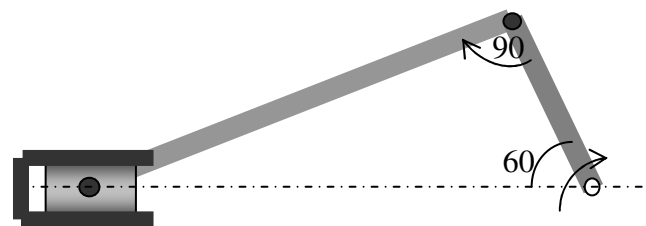
$$r_G = \frac{-0,3 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3}{5} = 0,06 \text{ m}$$

il baricentro si trova quindi a 6 cm dall'asse di rotazione dalla parte della massa più elevata. Nel momento in cui la barra inizia a ruotare con accelerazione di $22,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ nel baricentro, nasce una forza d'inerzia orizzontale pari a $F_i = -5 \cdot 22,2 = 111 \text{ N}$ che è equilibrata dalle reazioni dei cuscinetti. La figura mostra una vista dall'alto della barra con la forza d'inerzia rappresentata vettorialmente.



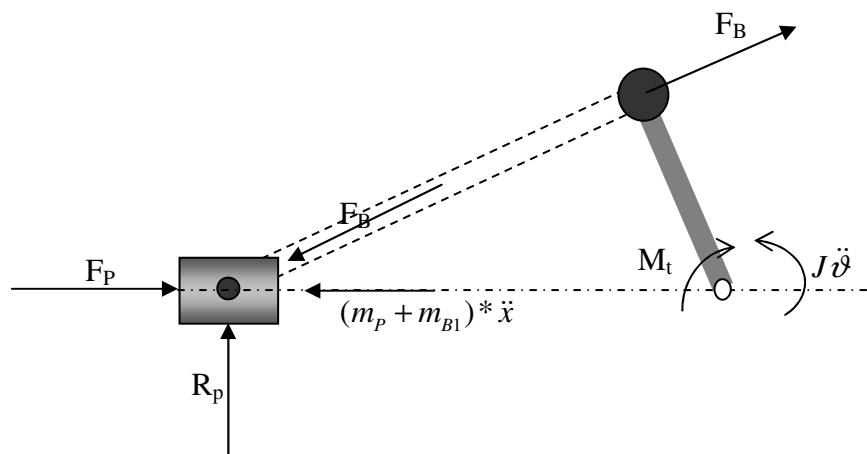
E' appena opportuno notare che insieme alla forza d'inerzia è presente una coppia d'inerzia, anch'essa rappresentata nel disegno.

D.20 Nel manovellismo in figura il raggio della manovella è $r = 120 \text{ mm}$, la lunghezza della biella 260 mm , la massa della biella $2,5 \text{ kg}$, quella del pistone $1,8 \text{ kg}$, la massa della manovella, costituita da un'asta sottile omogenea, $2,0 \text{ kg}$, il diametro del pistone 150 mm . Supponendo di poter approssimare la biella con un sistema equivalente di due masse uguali, una nel piede di biella, l'altra nel perno di manovella e considerando una pressione di 85 bar all'interno del cilindro e ammettendo che il sistema sia inizialmente in quiete, si calcoli la coppia motrice e l'accelerazione angolare della manovella.



Soluzione

Riproponendo il disegno con le approssimazioni fatte per la distribuzione delle masse si ha:



Equilibrio dinamico del pistone. In direzione orizzontale sussiste la relazione:

$$85 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} - F_b \cos(30^\circ) - (1,25 + 1,8) \cdot \ddot{x} = 0$$

Equilibrio dinamico alla rotazione della manovella:

La biella trasmette due forze eguali ed opposte rispettivamente al pistone e alla manovella. L'equilibrio dinamico alla rotazione di quest'ultima è espresso dalla relazione:

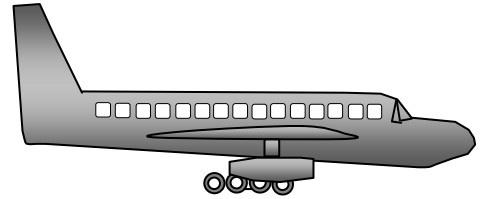
$$F_B * r - (m_m \frac{r^2}{3} + m_{B2} * r^2) * \ddot{\vartheta} = 0$$

Il primo termine della relazione precedente rappresenta proprio il momento motore cercato ma la sua determinazione non è ancora possibile perché nelle due relazioni scritte sono presenti tre incognite $F_B, \ddot{\vartheta}, \ddot{x}$. Osservando il disegno si può vedere che l'accelerazione tangenziale dell'estremità libera della manovella è:

$$a_m = \ddot{\vartheta}r \quad e \quad \ddot{x} = \ddot{\vartheta}r \cos(30).$$

L'ultima relazione scritta permette di risolvere il problema proposto. Si lascia al lettore di trovare il valore numerico del momento motore.

D.21 Un aereo da trasporto passeggeri al decollo a pieno carico ha massa totale pari a 360 t e la portanza è pari al 60 % del peso dell'aereo a 200 km/h. Complessivamente i carrelli del velivolo hanno 16 ruote con diametro $d=1150$ mm, con coefficiente di attrito volvente pari a $f = 0,01 + 1,5 * 10^{-6} \omega^2$, essendo ω la velocità angolare delle ruote in rad/s. Calcolare la forza orizzontale resistente in corrispondenza di ogni ruota all'inizio del decollo e a 200 km/h.



Soluzione.

Il peso che grava su una singola ruota al decollo è:

$$\frac{360.000}{16} * 0,4 * 9,81 = 88290 \text{ N}$$

$$v = \frac{200}{3,6} = 55,55 \frac{m}{s} \quad \omega = \frac{v}{1,075} = 51,67 \frac{rad}{s} \quad f = 0,01 + 1,5 * 10^{-6} * 51,67^2 = 0,014$$

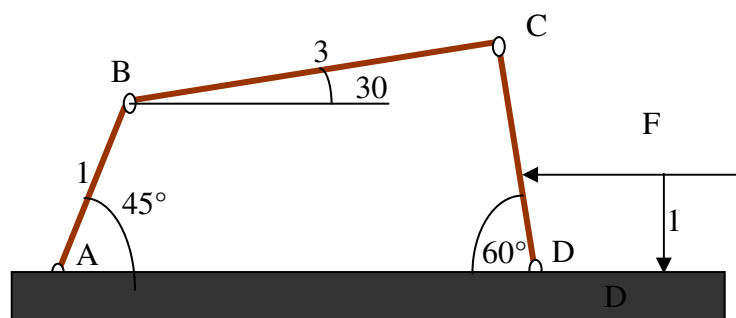
si ha poi

$$F_r = f * 88290 = 0,014 * 88290 = 1236 \text{ N}$$

Il dato precedente si riferisce alla velocità di 200 km/h mentre all'inizio del decollo si ha:

$$f = 0,01 \quad F_r = 883 \text{ N}$$

D.22 Nel quadrilatero articolato in figura, di cui è completamente nota la geometria, una forza di 10 N insiste sul lato CD. Calcolare la coppia da applicare all'asta AB per mantenere il quadrilatero in equilibrio statico. Calcolare anche le reazioni in A e D.



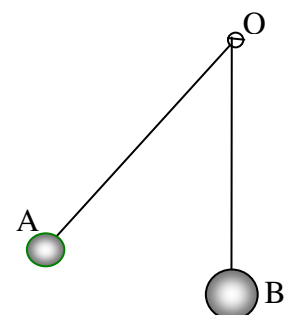
Soluzione.

Osserviamo che l'asta BC non è caricata lungo la sua estensione per cui sarà soggetta soltanto a carichi disposti lungo il suo asse. Con semplici considerazioni geometriche si ha:

$$l_{CD} = \frac{1 * \sin 45 + 3 * \sin 30}{\sin 60} = 2,55 \text{ m} \quad F_{BC} * 2,55 = 10 \quad F_{BC} = 3,92 \text{ N}$$

$$3,92 * \cos 30 * \sin 45 - 3,92 \sin 30 * \cos 45 = M = 1,01 \text{ Nm}$$

Il lettore potrà esercitarsi a trovare la soluzione anche per via grafica.



D.23 La massa del pendolo A in figura è di 2 kg, quella del pendolo B

di 5 kg. Il filo di sospensione è lungo 2 m per ambedue. L'inclinazione iniziale del pendolo A è di 30°. Trovare l'angolo a cui si portano le due masse dopo l'urto assumendo un coefficiente di restituzione pari a 0.5.

Soluzione.

La collisione si può trattare con le leggi dell'urto centrato in quanto le due sfere si toccano sulla

$$v_1^+ = \frac{(m_1 - em_2)v_1^- + m_2(1+e)v_2^-}{m_1 + m_2}$$

verticale del punto di sospensione O. Ricordando

$$v_2^+ = \frac{(m_2 - em_1)v_2^- + m_1(1+e)v_1^-}{m_1 + m_2}$$

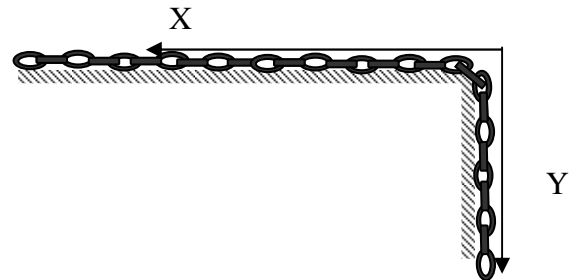
e sostituendo i valori reali delle masse e del coefficiente di restituzione si ha:

$$mgl(1 - \cos 30) = \frac{1}{2} 2 * v_A^2 \quad v_A^- = \sqrt{2 * 9,81 * 2(1 - \cos 30)} = 2,29 \frac{m}{s}$$

$$v_A^+ = \frac{(2 - 2,5) * 2,29}{7} = -0,82 \frac{m}{s}$$

$$v_B^+ = \frac{2,5 * (1,5) * 2,29}{7} = 1,23 \frac{m}{s}$$

D.24 Una catena flessibile priva di attrito, di lunghezza totale pari a 3 m e' poggiata su un gradino sporgente in modo tale che solo un metro di essa si trovi in giacitura verticale. Determinare il tempo richiesto dalla catena per scivolare completamente dal gradino, una volta rilasciata.



Soluzione.

La forza che provoca lo scorrimento della catena è il peso del tratto verticale. Utilizzando un sistema di riferimento come quello in figura si ottiene:

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \frac{y}{L} \frac{Mg}{M} = \frac{g}{L} y \quad ; \quad \ddot{y} - \frac{g}{L} y = 0$$

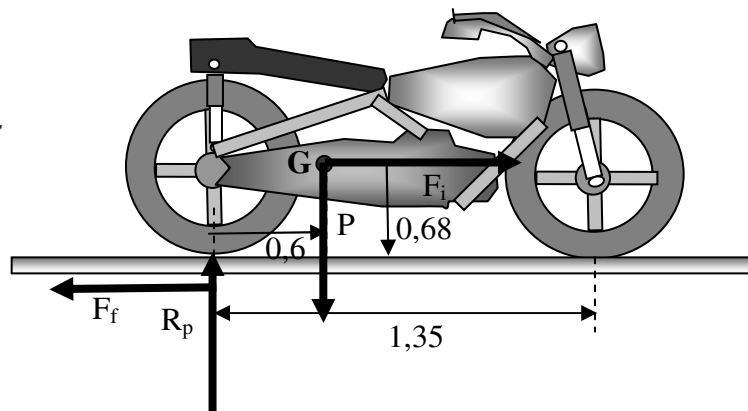
La soluzione dell'equazione differenziale a coefficienti costanti scritta è del tipo:

$$y = y_0 e^{\alpha t} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{g}{L} \quad e \quad y_0 = 1$$

quando:

$$y = 3m \quad 3 = e^{\frac{g}{L} t} \quad t = \ln 3 * \frac{3}{g} = 1,09 \text{ s}$$

D.25 Nella moto rappresentata in figura, di massa pari a 250 kg considerando anche il conducente, gli assi delle ruote distano di 1.35



m. Il baricentro della moto si trova 0.6 m avanti alla ruota posteriore e 0.68 m sopra il livello del terreno. Se si frena solo con la ruota posteriore determinare la massima decelerazione assumendo un coefficiente d'attrito pari a 0.4.

a) quando la moto viaggia in rettilineo.

b) quando la moto viaggia in una curva di 60 m di raggio a 65 km/h. Trascurare l'inclinazione della moto in curva.

Soluzione.

Per il rettilineo si consideri che la moto è soggetta alla forza peso del sistema moto-conduttore, applicata nel baricentro G e alla forza d'inerzia che nasce in corrispondenza della frenata, applicata anch'essa nel baricentro. Considerando l'equilibrio alla rotazione della moto rispetto al punto di contatto della ruota anteriore si ha:

$$0,75 * P + 1,35 * R_p + 0,68 * F_i = 0$$

Imponendo la condizione di equilibrio nella direzione orizzontale si ha anche:

$$0,4R_p = F_i$$

Le due relazioni precedenti combinate forniscono:

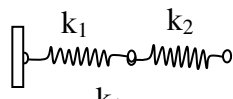
$$(1,35 + 0,4 * 0,68)R_p = 0,75P \quad R_p = \frac{0,75 * 250 * 9,81}{1,62} = 1134 \text{ N}$$

La forza frenante è $F_f = 0,4 * 1134 = 453 \text{ N}$

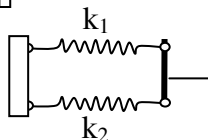
Per la marcia in curva si consideri che l'effetto giroscopico produce una diminuzione della reazione sulla ruota posteriore con conseguente diminuzione della massima forza frenante. Lo svolgimento numerico del quesito è lasciato al lettore.

6.2 RIGIDENZE DI ALCUNI ELEMENTI STRUTTURALI

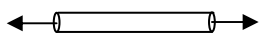
Molle in serie $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$



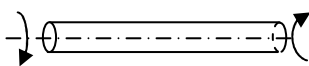
Molle in parallelo $K = k_1 + k_2$



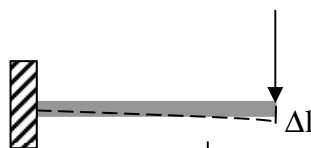
Asta in trazione $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l}$



Asta in torsione $k = \frac{GJ_p}{l}$

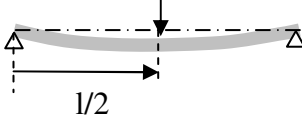


Trave a mensola $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{3EJ}{l^3}$



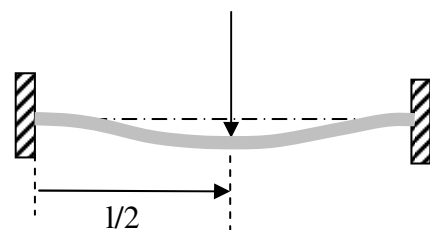
Trave appoggiata rigidezza in mezzeria

$$k = \frac{48EJ}{l^3}$$



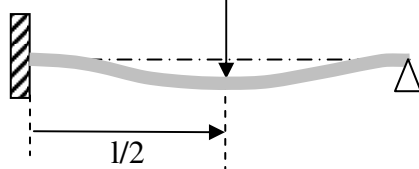
Trave incastrata rigidezza in mezzeria

$$k = \frac{192EJ}{l^3}$$

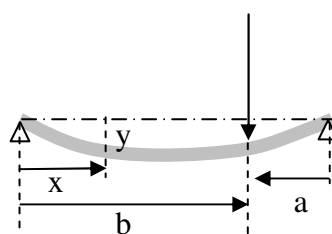


Trave incastro-appoggio in mezzeria

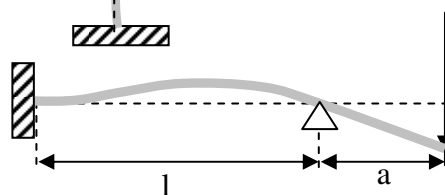
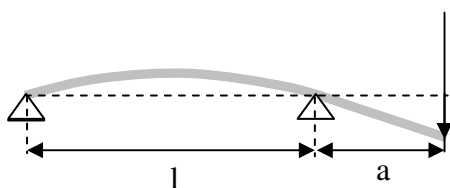
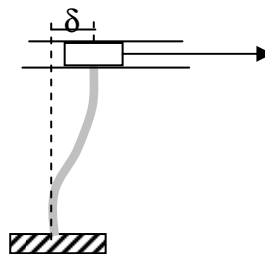
$$k = \frac{768EJ}{7l^3}$$



Trave appoggiata $\frac{k = 3EJl}{a^2b^2} \quad y_x = \frac{Pbx}{6EJl}(l^2 - x^2 - b^2)$



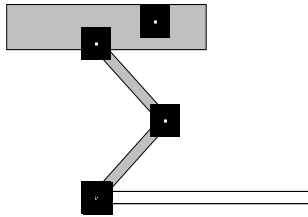
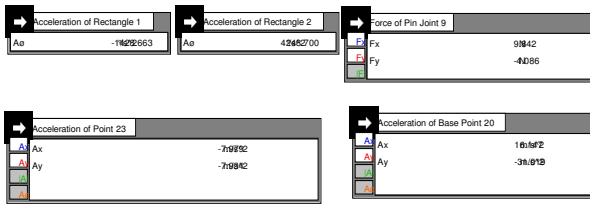
Trave con spostamento senza rotazione $k = \frac{12EJ}{l^3}$



Trave a sbalzo $k = \frac{3EJ}{(l+a)*a^2}$

$$k = \frac{24EJ}{a^2(3l+8a)}$$

9.5 CONCLUSIONE



problemi della biomeccanica richiedono spesso, per non dire sempre, un approccio integrato, analitico-numerico e sperimentale. Spesso i risultati sperimentali, ove sia possibile trovare un metodo valido e affidabile per ottenerli, sono utili per validare il metodo analitico-numerico, che potrà quindi essere usato con accresciuta fiducia in casi analoghi. Alcuni degli strumenti avanzati a cui si è accennato saranno presentati nei Corsi futuri di Bioingegneria Meccanica.

Concludiamo questa breve introduzione ai problemi della biomeccanica osservando che i sistemi di interesse sono in genere tutt'altro che semplici. Si pensi alla complessità del nostro sistema di locomozione e della sua catena di controllo. Tuttavia un approccio modellistico, anche se drasticamente semplificato, è sempre utile, perché permette di definire e valutare i principali parametri che condizionano il comportamento del sistema. Per gestire la complessità intrinseca di molti sistemi sono oggi disponibili strumenti di modellazione e simulazione assai validi e potenti. I

10 RICHIAMI DI MATEMATICA

Trigonometria piana

Dato un cerchio trigonometrico di raggio unitario valgono le seguenti relazioni di uso generale:

$$\sin \alpha = \overline{HP} \quad \cos \alpha = \overline{KP} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

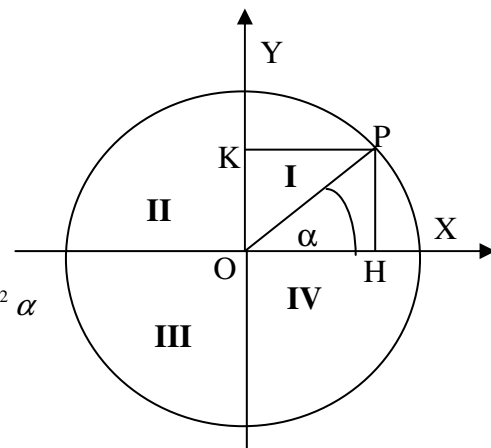
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

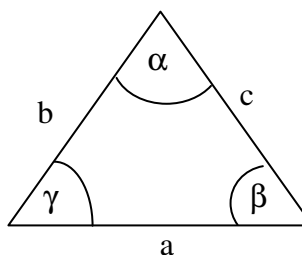


Risoluzione di triangoli piani:

Dato un triangolo avente lati di lunghezza a,b,c ai quali si oppongono rispettivamente gli angoli α, β, γ , valgono le formule generali:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{teorema dei seni})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{teorema di Carnot})$$



	I	II	III	IV
sinα	+	+	-	-
cosα	+	-	-	+
tanα	+	-	+	-
cscα	+	+	-	-
secα	+	-	-	+
cotα	+	-	+	-

Segni delle funzioni trigonometriche nei vari quadranti.

Sviluppi in serie:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots [x^2 < 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots [x^2 < \infty]$$

Sviluppo in serie di Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{con } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad -l \leq x \leq l$$

Derivate

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x = \sin(dx) = \tan(dx) = dx$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1 \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad \frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x \quad \frac{d \tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

Integrali

Regole per l'integrazione di funzioni generiche.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(x)g(x) dx = f(x) \int g(x) dx - \int (d[f(x)] \int g(x) dx) dx$$

Funzioni razionali

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{per } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Logaritmi

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \log_b x dx = x \log_b x - x \log_b e + C$$

Funzioni esponenziali

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Funzioni irrazionali

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arc} \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{arc} \cosh x + C$$

Funzioni trigonometriche

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

Funzioni iperboliche

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x dx = \arctan(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{coth} x dx = \ln |\sinh x| + C$$

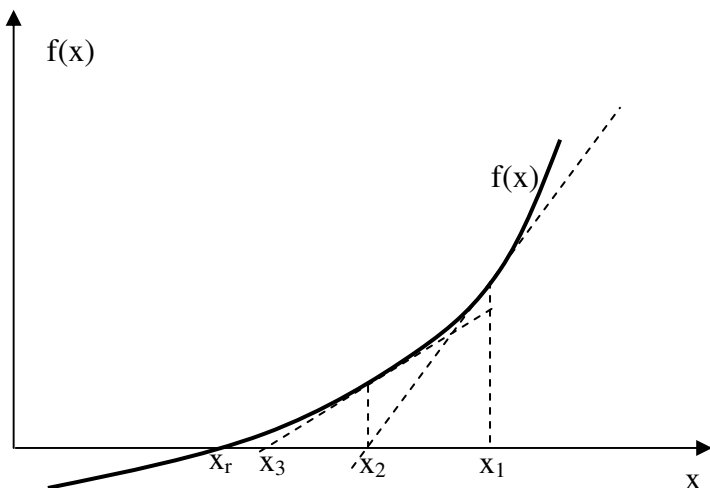
$$\int \operatorname{arccosh} x dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$\int \operatorname{arcsinh} x dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$\int \operatorname{arctanh} x dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{\log(1-x^2)}{2} + C$$

Equazioni algebriche non trattabili elementarmente con formule risolutive.

Frequentemente, nell'applicazione di principi della meccanica, si perviene ad equazioni algebriche o trascendenti che non sono risolvibili (o facilmente risolvibili) in forma chiusa. In questi casi un metodo iterativo, come quello di Newton rappresenta un potente strumento per trovare le radici



dell'equazione. Per prima cosa si ponga l'equazione da risolvere nella forma $f(x) = 0$. La figura mostra una funzione arbitraria per valori della variabile indipendente x in vicinanza della radice cercata x_r . Si supponga di poter tracciare in un grafico la funzione. E' evidente che la radice cercata non è altro che il punto sull'asse delle ascisse in cui il grafico della funzione interseca quest'asse. Supponendo di avere una stima grossolana della radice, ad es. x_1 , se questo valore non corrisponde ad un massimo o un minimo, è possibile

ottenere una migliore approssimazione della radice tracciando la tangente alla curva in x_1 e calcolando l'ascissa dell'intersezione della tangente tracciata con l'asse delle ascisse. Supponendo che quest'ascissa sia x_2 , in base alla figura possiamo scrivere:

$$\tan \vartheta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

in cui $f'(x_1)$ denota il valore della derivata della funzione $f(x)$ valutata in x_1 . Risolvendo l'equazione

precedente per x_2 si ottiene $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ Il termine $\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ rappresenta la correzione alla

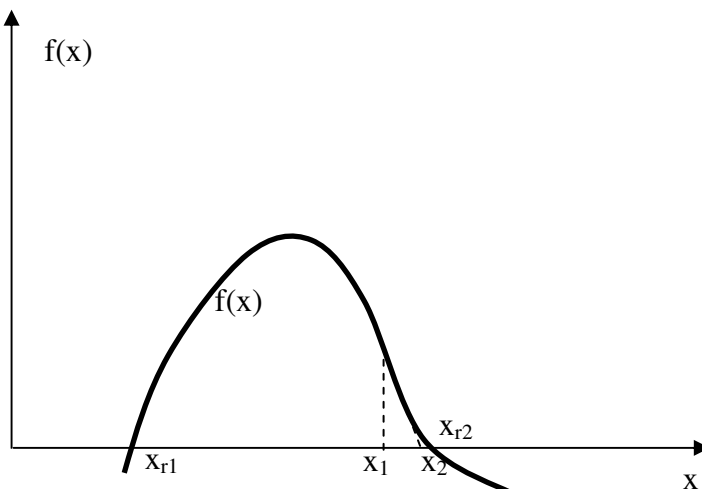
stima iniziale della radice, cioè ad x_1 . Calcolato x_2 si può procedere ad un'ulteriore approssimazione calcolando x_3 e così via. La formula generale recursiva è la seguente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

L'equazione è applicata iterativamente sino ad ottenere un valore

sufficientemente approssimato della radice cercata, cioè sin quando $f(x_n)$ non è abbastanza prossimo a zero. In genere si fissa in anticipo un livello di scostamento ε e il calcolo si considera finito quando $|f(x_n)| \leq \varepsilon$. Il metodo è valido per qualunque segno delle x_k , della funzione $f(x_k)$ e della derivata $f'(x_k)$.

- E' opportuno far notare che il metodo non procede se il valore della derivata diventa zero. In questo caso la tangente alla curva non interseca l'asse x essendo parallela a questo. Infatti se la derivata è nulla il corrispondente punto della curva è un punto di massimo o minimo ed in questo punto la tangente è orizzontale. Se la derivata è non nulla ma molto piccola la tangente interseca l'asse delle ascisse in un punto la cui ascissa può essere una peggiore



approssimazione del punto precedente. Per questo è conveniente limitare l'entità della correzione. Se quella trovata è superiore al massimo stabilito, si assume la massima correzione invece di quella calcolata.

- Se in un piccolo intervallo delle x esistono numerose radici occorre essere piuttosto vicini alla radice cercata per convergere su questa. La figura mostra un caso in cui la convergenza avviene su una radice successiva a quella cercata.
- Può anche avvenire un'oscillazione intorno al valore cercato se la funzione è antisimmetrica rispetto a una radice che costituisce un flesso della curva. In questi casi l'impiego di una correzione dimezzata può essere un buon artificio per arrivare alla convergenza.

Esempio.

Cominciando da una stima iniziale $x_1=5$ trovare la radice dell'equazione :

$$e^x - 10 \cos x - 100 = 0$$

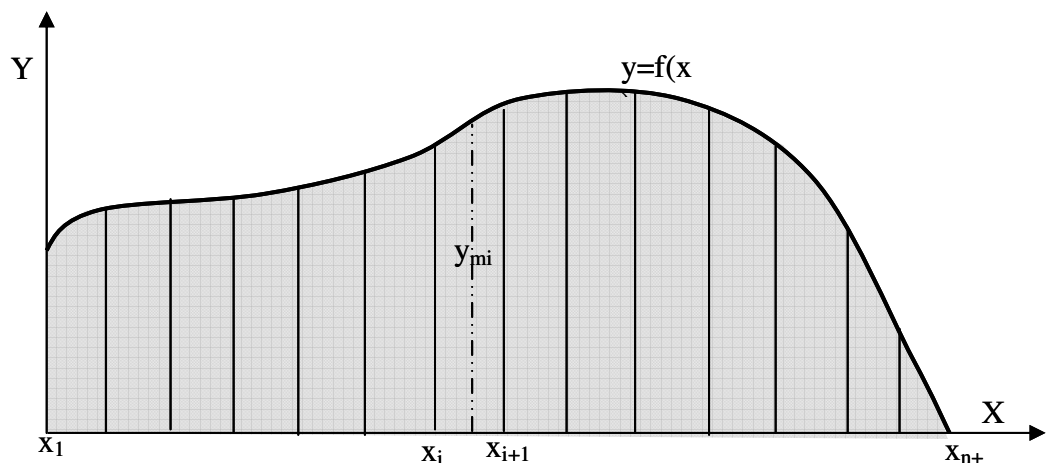
La tabella seguente riporta i risultati delle iterazioni compiute nella ricerca della radice. La ricerca è stata arrestata quando il valore assoluto della correzione è diventato inferiore a 10^{-6} .

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}-x_k=-f(x_k)/f'(x_k)$
1	5,000.000	45,576537	138,823916	-0,328305
2	4,671.695	7,285610	96,887065	-0,075197
3	4,596.498	0,292886	89,203650	-0,003283
4	4,593.215	0,000527	88,882536	-0.000006
5	4,593.209	$-2 \cdot 10^{-8}$	88,881956	$2,25 \cdot 10^{-10}$

Calcolo di aree mediante integrazione grafica.

E' spesso necessario valutare l'area sottostante ad una curva che rappresenta il grafico di una funzione. E' noto che quest'area rappresenta l'integrale della funzione rispetto alla variabile indipendente riportata nelle ascisse. La procedura si riassume nei passi seguenti.

1. Si divide l'intervallo delle ascisse sottostante alla curva in intervalli, eguali o diversi. Intervalli diversi possono essere giustificati dall'esigenza di suddividere finemente dove la curva varia rapidamente, grossolanamente dove la curva ha un andamento più regolare.



2. Per ciascun'area elementare corrispondente

ad una divisione s'individua l'ordinata media. Se la curva può essere considerata assimilabile ad un segmento nell'intervallo dell'ascissa considerato, l'ordinata media è semplicemente data dalla semisomma dei valori estremi della funzione.

L'area dell'intervallo i-esimo è data dal prodotto:

$$\Delta A_i = \Delta x_i * y_{mi} = \Delta x_i * \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}$$

e l'area complessiva è:

$$A = \int_{x_1}^{x_{n+1}} y_m dx = \sum_i \Delta x_i * \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}$$

La formula presentata è una delle regole di quadratura che permettono di calcolare un'area suddividendola in trapezi elementari.

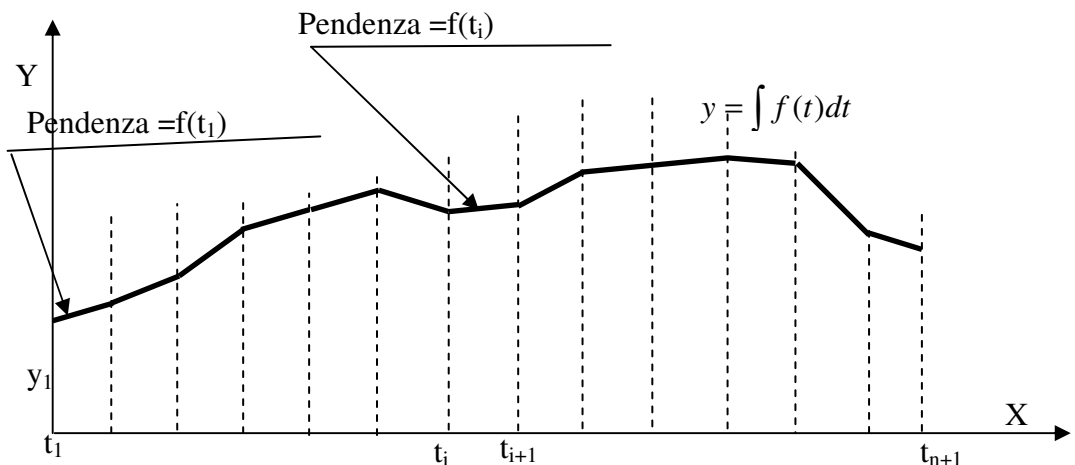
Integrazione grafica.

Nel caso in cui si desideri integrare una funzione $f(t)=dy/dt$, ma la funzione sia difficile da integrare analiticamente, o semplicemente sia data in forma tabellare, si può ricorrere all'integrazione grafica di Eulero, basata sul fatto che se la funzione $f(t)$ fosse lineare o potesse approssimarsi come una funzione lineare in un intervallo t_1-t_2 abbastanza piccolo, si avrebbe:

$$y(t_2) = y(t_1) + f(t_1) * (t_2 - t_1)$$

la formula può essere applicata iterativamente per ottenere di seguito $y(t_3)$ e tutti i valori successivi della funzione cercata $y(t)$. Perché il processo possa partire è necessario fissare le condizioni iniziali, cioè il valore di y_1 . Cio' corrisponde nella teoria dell'integrazione a fissare il valore della costante d'integrazione. Tracciato quindi un segmento verticale di ordinata y_1 si traccia, a partire dall'estremità

superiore di questo, un segmento con inclinazione pari a $f(t_1)$ sino ad incontrare la linea verticale corrispondente all'ascissa t_2 . Il processo continua poi sino alla fine dell'ultimo



intervallo. E' opportuno notare che se la funzione $f(t)$ fosse costante il processo grafico porterebbe ad un valore esatto dell'integrale, prescindendo dagli inevitabili errori di tracciamento grafico. Se la funzione è invece di tipo diverso, si avrà sempre un errore, tanto più grande quanto maggiori saranno gli intervalli elementari. Questi non devono in ogni caso diventare troppo piccoli per non cadere nei rilevanti errori di troncatura dovuti all'elevato numero d'operazioni aritmetiche da compiere all'elaboratore elettronico.

Oltre a quello presentato, basato sull'approssimazione lineare della funzione da integrare sono presenti numerosi altri metodi di quadratura che permettono di ottenere una migliore approssimazione. Tra questi citiamo il ben noto metodo di Runge-Kutta che tiene appunto conto dei possibili cambi della pendenza della funzione da integrare all'interno di un intervallo elementare.

Esempio:

Si voglia integrare la funzione $\ln(x)$ per x compreso tra 1 e 5. Si consideri l'intervallo complessivo dei valori di x diviso in 8 intervalli elementari. La curva inferiore mostra il risultato del processo d'integrazione illustrato precedentemente, quella superiore l'andamento esatto dell'integrale di $\ln(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$, nel

quale si è posta la costante di integrazione pari a 1 per far coincidere l'inizio delle due curve. Come si vede il processo di integrazione numerica porta ad errori via via crescenti. Ciò non deve stupire, considerato il basso numero di intervalli adottato. Si consiglia di ripetere l'esercizio con un numero d'intervalli più alto.

