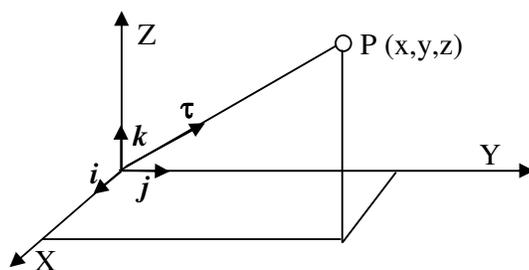


2. ELEMENTI DI CINEMATICA

2.1 Cinematica del punto materiale

Il punto materiale è un'astrazione matematica che rappresenta un corpo senza estensione, ma dotato di massa. Un punto materiale può subire traslazioni ma non rotazioni, non essendo queste ultime definibili per un punto.

La posizione di un punto materiale nello spazio è completamente definita da un vettore \mathbf{r} , o dalla matrice colonna che rappresenta le sue componenti, coordinate Cartesiane del punto P.



$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = r\boldsymbol{\tau} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

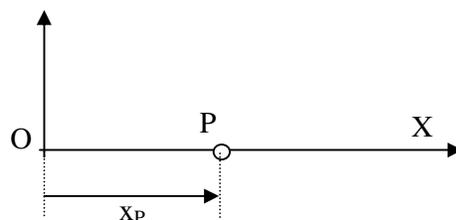
Le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto P si ottengono derivando il vettore che rappresenta la sua posizione, ricordando che, essendo il sistema di riferimento assunto da considerare fisso, le derivate dei versori $\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sono nulle

$$\mathbf{v}_p = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$$

$$\mathbf{a}_p = \frac{d^2}{dt^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k})$$

2.1.1 Moto rettilineo

La trattazione può essere scalare, perché la posizione del punto su una traiettoria rettilinea è definita da un solo parametro scalare, ad esempio l'ascissa x , essendo l'asse x diretto come la traiettoria del moto. Per la velocità ed accelerazione di P abbiamo allora le semplici espressioni:



$$OP = x_p$$

$$v_p = \dot{x}_p$$

$$a_p = \ddot{x}_p$$

Esempi di moto rettilineo sono:

Il moto rettilineo uniforme, nel quale l'accelerazione è nulla e la velocità costante.

Il moto rettilineo uniformemente accelerato, nel quale la velocità varia linearmente col tempo, mentre l'accelerazione è costante. Per questo tipo di moto si ha:

$$a_p = a = \text{cost} \quad v_p = \int_0^t a * dt = a * t + v_0 \quad x_p = \int_0^t v_p * dt = \frac{1}{2} a * t^2 + v_0 * t + x_0$$

Nelle espressioni precedenti x_0 e v_0 rappresentano rispettivamente lo spazio percorso per $t = 0$ e la velocità iniziale del punto materiale. Il moto rettilineo uniforme rappresenta soltanto il caso più semplice. Le leggi corrispondenti sono applicabili al moto di corpi in cui si possa ragionevolmente ritenere l'accelerazione costante. Questo corrisponde a supporre costante, in modulo direzione e verso la risultante delle forze applicate al corpo. Sono tuttavia frequenti casi di moti in cui le forze applicate al corpo dipendono dalla sua velocità, come nel caso della resistenza opposta dall'aria

all'avanzamento di un veicolo, o dal suo spostamento. Il caso della caduta per gravità di un corpo immerso in aria dell'esempio 2 che segue rappresenta un tipico moto nel quale l'accelerazione dipende dal quadrato della velocità di traslazione.

Esempio 1

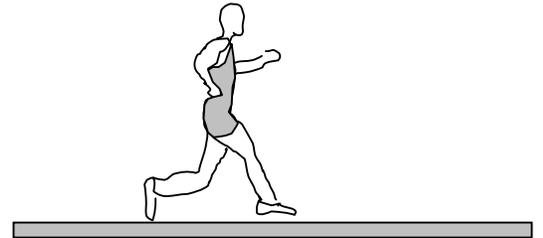
Uno scattista raggiunge la sua massima velocità v_{\max} in 2,5 s dalla partenza, con accelerazione costante. In seguito mantiene la velocità e termina i 100 m in un tempo totale di 10,4 s. Determinare la velocità massima v_{\max} .

Le relazioni necessarie per risolvere il problema sono quelle espone precedentemente. Si ha:

$$v_{\max} = a * 2,5$$

$$\frac{1}{2} a * 2,5^2 + v_{\max} (10,4 - 2,5) = 100$$

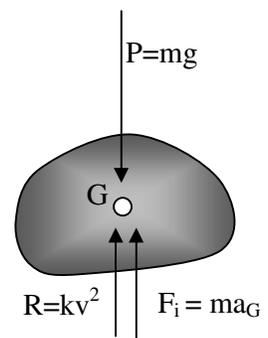
Le due equazioni scritte, che esprimono la velocità massima raggiunta dallo scattista e lo spazio percorso, contengono le due incognite v_{\max} e a . Esse portano al risultato $v_{\max}=10,93$ m/s.



Esempio 2

Moto dei gravi.

Se un corpo è lasciato cadere liberamente sotto l'azione del campo della gravità, esso sarà soggetto alla sua forza peso, alla resistenza dell'aria e alla sua forza d'inerzia. Le forze d'inerzia verranno descritte compiutamente nel capitolo sulla dinamica. Esse rappresentano la resistenza che un corpo libero oppone quando gli si imprime un'accelerazione. La forza d'inerzia di un corpo è applicata nel suo baricentro, ha la direzione dell'accelerazione, verso opposto e modulo pari a $-m\mathbf{a}_G$, essendo \mathbf{a}_G l'accelerazione del baricentro. Il secondo principio della dinamica porta a scrivere:



$$\mathbf{P} - \mathbf{R} = m\mathbf{a}_G$$

Anticipando il principio di d'Alembert, sul quale si ritornerà nel seguito, possiamo portare la forza d'inerzia al primo membro e imporre una condizione di equilibrio **dinamico**, analogamente a quanto si fa nello scrivere le equazioni di equilibrio statico, imponendo che la somma di tutte le azioni esterne, reazioni vincolari e forze d'inerzia si annulli:

$$\mathbf{P} - \mathbf{R} - m\mathbf{a}_G = 0$$

Tutti i problemi, statici e dinamici possono essere trattati con equazioni formalmente simili, purché nei problemi dinamici si inseriscano nelle condizioni di equilibrio le forze d'inerzia.

Se il corpo parte da fermo la resistenza dell'aria è inizialmente nulla e la forza peso mg è eguale alla forza d'inerzia $-m\mathbf{a}_G$. Risulta quindi che l'accelerazione assunta dal corpo è eguale all'accelerazione di gravità. Quando il corpo accelera la velocità cresce e così pure la resistenza dell'aria. Poiché il sistema delle tre forze deve essere in equilibrio in termini scalari si ha:

$$P - R = ma_G \quad a_G = \frac{P - R}{m} = \frac{mg - R}{m}$$

al crescere della velocità l'accelerazione del baricentro del corpo decresce sino ad annullarsi quando la resistenza dell'aria diventa eguale alla forza peso. Da quel momento il moto diviene uniforme e

la forza d'inerzia scompare. La situazione di moto uniforme può facilmente essere analizzata scrivendo che il peso del corpo è bilanciato dalla resistenza aerodinamica opposta dall'aria, che si può ritenere (vedi il paragrafo sulle forze di tipo aerodinamico più avanti) proporzionale all'area frontale esposta dal corpo, alla densità dell'aria, e al quadrato della velocità del corpo, attraverso un coefficiente che prende il nome di coefficiente di resistenza aerodinamica.

$$P = mg = c_R \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{\frac{2P}{c_R \rho A}}$$

In cui v è la velocità del corpo a regime, A la sezione frontale, ρ la densità dell'aria, c_R il coefficiente di resistenza aerodinamica. Se si vuole analizzare anche la fase d'accelerazione, scrivendo l'equazione di equilibrio dinamico si ha:

$$P - \frac{1}{2} c_R \rho \dot{y}^2 A - m\ddot{y} = 0 \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = g - \frac{c_R \rho A \dot{y}^2}{2m}$$

L'equazione differenziale scritta è del tipo $\frac{d\dot{y}}{dt} = k_1 - k_2 \dot{y}^2$ con $k_1 = g$ $k_2 = \frac{c_R \rho A}{2m}$. Essa permette di separare le variabili ottenendo:

$$\frac{d\dot{y}}{k_1 - k_2 \dot{y}^2} = dt \quad \text{ponendo} \quad a = \sqrt{k_1} \quad b = \sqrt{k_2} \quad \text{si ottiene:}$$

$$\frac{d\dot{y}}{(a - b\dot{y})(a + b\dot{y})} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a + b\dot{y}} + \frac{1}{a - b\dot{y}} \right) d\dot{y} = \frac{1}{2ab} \left(\frac{d(a + b\dot{y})}{a + b\dot{y}} - \frac{d(a - b\dot{y})}{a - b\dot{y}} \right) d\dot{y} = dt$$

si ha poi:

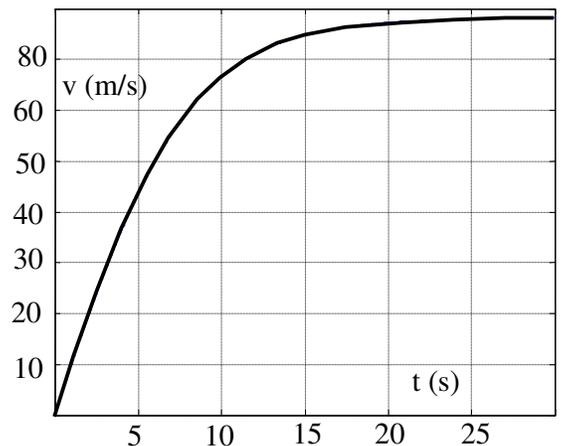
$$\frac{1}{2ab} \left[\int_0^v \frac{d(a + b\dot{y})}{a + b\dot{y}} d\dot{y} - \int_0^v \frac{d(a - b\dot{y})}{a - b\dot{y}} d\dot{y} \right] = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2ab} \ln \left[\frac{(a + b\dot{y})^v}{(a - b\dot{y})^v} \right]_0^v = t$$

$$\frac{1}{2ab} \ln \left[\frac{(a + b\dot{y})}{(a - b\dot{y})} \right] = t \quad \frac{(a + b\dot{y})}{(a - b\dot{y})} = e^{2abt}$$

$$(a + b\dot{y}) = (a - b\dot{y}) * e^{2abt} \quad b(1 + e^{-2abt})v = a(e^{2abt} - 1)$$

$$v = \frac{a(e^{2abt} - 1)}{b(1 + e^{2abt})} = \sqrt{\frac{2gm}{c_R \rho A}} \frac{(e^{2abt} - 1)}{(1 + e^{2abt})}$$



l'ultima equazione indica che per tempi lunghi i due termini esponenziali si cancellano a vicenda e la velocità assume il valore asintotico $\sqrt{\frac{2gm}{c_R \rho A}}$, già calcolato in condizioni di regime. Per $t = 0$ la velocità è zero (si è assunto, infatti, nello svolgimento dell'integrazione che fosse $v = 0$ per $t = 0$). Per tempi intermedi si osserva una fase d'accelerazione decrescente.

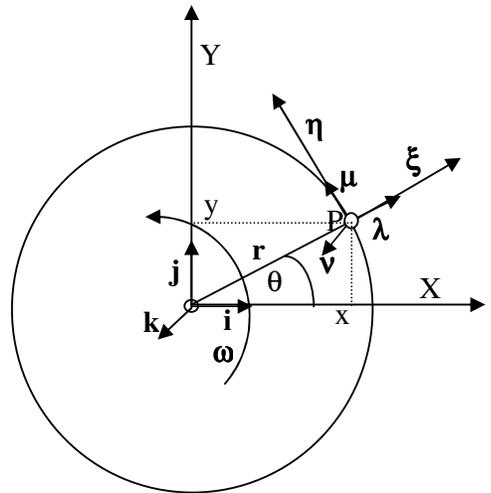
Per trattare un caso pratico ci si riferirà ancora al caso del paracadutista in caduta libera con:

$$m = 75 \text{ kg} \quad c_R = 0,3 \quad A = 1,8 * 0,35 \text{ m}^2 = 0,63 \text{ m}^2 \quad \rho = 1,27 \text{ kg / m}^3 \quad c_R = 0,3$$

Il diagramma mostra l'andamento della velocità in funzione del tempo, con i dati assunti. La velocità varia in modo pressoché lineare nei primi secondi, per cambiare pendenza in seguito. La pendenza iniziale della curva, come ci si poteva aspettare, è prossima a g. Il valore asintotico della velocità del paracadutista in caduta libera è di circa 78 m/s, 280 km/h. Il diagramma mostra anche che, se ci si limita ai primi 5-10 secondi non si commette un grande errore se si trascura la resistenza dell'aria, assumendo il moto come uniformemente accelerato con accelerazione pari a g.

2.1.2 Moto circolare.

Il moto circolare può essere studiato facendo ricorso o ad un riferimento fisso XYZ con versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (se supponiamo che la traiettoria sia contenuta nel piano XY la coordinata z è superflua), o ad uno mobile ξ, η, ζ con versori $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$, che accompagna il punto materiale durante il suo movimento, con $\boldsymbol{\lambda}$ orientato secondo il raggio della traiettoria, dal centro verso la periferia, $\boldsymbol{\mu}$ tangente alla traiettoria e orientato in modo da percorrere la circonferenza con senso di rotazione antiorario, $\boldsymbol{\nu}$ perpendicolare al piano del moto e orientato in modo da formare una terna destra con i primi due, cioè uscente verso l'osservatore. Velocità ed accelerazione del punto P potranno esprimersi ancora una volta usando le coordinate globali o locali. Nel primo caso si ha:



$$\mathbf{r}_p = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_p = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = \dot{\omega} r \sin \vartheta * \mathbf{i} + \dot{\omega} r \cos \vartheta * \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_p = (-\dot{\omega} r \sin \theta - \omega^2 r \cos \vartheta) * \mathbf{i} + (\dot{\omega} r \cos \theta - \omega^2 r \sin \theta) * \mathbf{j}$$

Rispetto al sistema locale si ha invece:

$$\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{\lambda})}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{\lambda} + r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = r\omega \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\lambda} = \omega r \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{a}_p = \dot{\omega} r \boldsymbol{\mu} + \omega r \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} = \dot{\omega} r \boldsymbol{\mu} - \omega^2 r \boldsymbol{\lambda}$$

L'accelerazione di P è la somma di due componenti, la prima tangenziale, la seconda centripeta. Quest'ultima è presente anche quando la velocità angolare del punto è costante.

Ricordando che:

$$\dot{x} = -r \sin \theta * \frac{d\theta}{dt} = -\omega r \sin \theta \quad \dot{y} = r \cos \theta * \frac{d\theta}{dt} = \omega r \cos \theta \quad \text{e:}$$

$$\mathbf{v}_p = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega r \sin \theta \\ \omega r \cos \vartheta \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_p = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} = \begin{Bmatrix} -\dot{\omega} r \sin \theta - \omega^2 r \cos \vartheta \\ \dot{\omega} r \cos \theta + \omega^2 r \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Si possono anche ottenere i valori precedenti delle componenti di velocità ed accelerazione rispetto ad assi fissi, partendo da quelle rispetto ad assi mobili e utilizzando la matrice di rotazione tra i due sistemi:

$${}_{\xi,\eta,\zeta}^{x,y,z}R = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{XYZ}\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega r \sin \vartheta \\ \omega r \cos \vartheta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

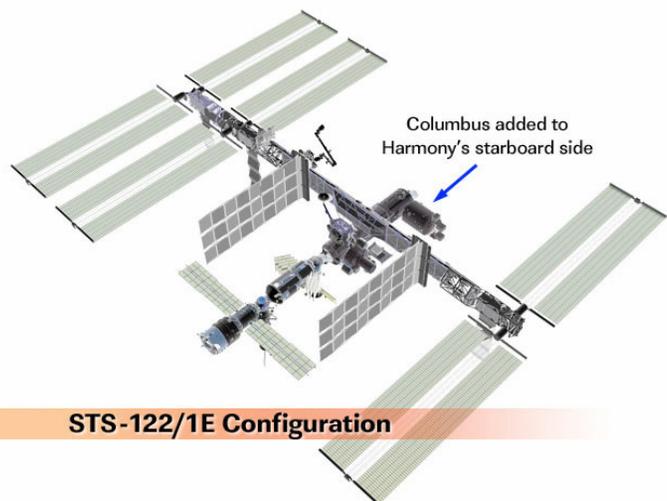
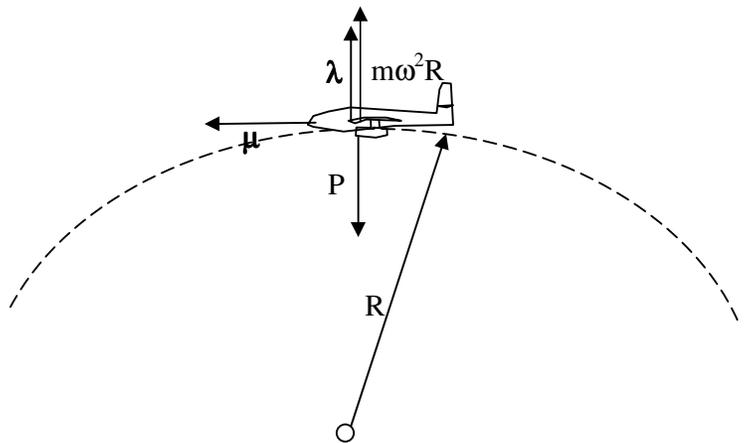
$${}^{XYZ}\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 r \\ \dot{\omega} r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\omega} r \sin \vartheta - \omega^2 r \cos \vartheta \\ \dot{\omega} r \cos \vartheta + \omega^2 r \sin \vartheta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esempio: Voli suborbitali

Nell'addestramento ai voli spaziali sono presenti prove che tendono ad abituare l'astronauta alla vita nello spazio, in assenza di gravità. Per simulare questa condizione si ricorre a piscine dove gli astronauti s'immergono per svolgere una serie di operazioni, per verificare e migliorare la capacità di lavoro in assenza di peso. Un'alternativa è quella dei voli suborbitali, nei quali un aeroplano, opportunamente equipaggiato, vola secondo traiettorie tali che l'accelerazione indotta dal volo compensi, con una certa approssimazione, quella di gravità. Ammettendo che la traiettoria sia costituita da un arco di circonferenza, cerchiamo di valutare il raggio necessario per ottenere un'accelerazione eguale ed opposta a quella di gravità.

Con riferimento alla figura superiore, se il velivolo percorre una traiettoria circolare di raggio R, l'aereo e tutti i suoi occupanti saranno soggetti ad un'accelerazione centripeta pari a $-\omega^2 R \lambda$, diretta come λ e con verso contrario. La forza d'inerzia corrispondente sarà quindi $m\omega^2 R \lambda$, diretta nel senso positivo di λ .

Supponendo che l'aereo percorra la sua traiettoria con una velocità costante di 800 km/h, corrispondente a 222 m/s, il raggio della traiettoria necessario per ottenere un'accelerazione pari a g



STS-122/1E Configuration

risulta: $R = \frac{g}{\omega^2} = \frac{v^2}{g} = \frac{222^2}{9,81} = 5023 \text{ m}$ il raggio della traiettoria sarà quindi di circa 5 km. Raggi

inferiori daranno luogo ad accelerazioni superiori a quella di gravità che proietteranno i passeggeri del velivolo verso il soffitto. La condizione di assenza di peso si può avere solo per periodi piuttosto brevi, circa 20 s. Impiegando lo stesso artificio si possono realizzare *campi di gravità artificiale*, ad esempio nelle stazioni spaziali orbitanti abitate dall'uomo. L'assenza assoluta di gravità protratta nel tempo induce nell'organismo fenomeni che a lungo termine conducono a vere e proprie patologie. L'assenza di gravità è anche causa di problemi tecnici in quanto obbliga a vincolare tutti gli oggetti e i sistemi presenti nella stazione orbitante. La gravità artificiale può essere indotta con una rotazione relativamente lenta della stazione intorno al proprio asse, rotazione che, per la mancanza di resistenze di qualunque tipo, non richiede un dispendio energetico se non nella fase iniziale, di accelerazione. La figura mostra la stazione spaziale internazionale ISS sviluppata congiuntamente dalla NASA insieme alle Agenzie Spaziali Europea ESA, Russa, Giapponese e Canadese. Attualmente la stazione ospita un equipaggio di tre persone. La figura si riferisce alla situazione dopo l'ultima missione per l'aggiunta del modulo Columbus, nel 2008. Per realizzare un campo di gravità artificiale di 0,1 g a 30 m dall'asse di rotazione è necessaria una velocità angolare di :

$$\omega = \sqrt{\frac{0,1 * 9,81}{30}} = 0,18 \text{ rad / s}$$

Cioè una rotazione completa ogni 34 ore.

2.1.3 Moti balistici

A questa categoria appartengono i moti dei corpi, lanciati da terra con una velocità iniziale, che percorrono traiettorie giacenti in un piano verticale. Consideriamo ad esempio un corpo balistico lanciato da terra con velocità v_0 . Se studiamo il moto considerando separatamente la componente x e la componente y delle velocità, osserviamo che il moto del corpo, o meglio del suo baricentro, in direzione verticale è uniformemente ritardato a causa dell'accelerazione di gravità mentre in direzione orizzontale è uniforme. Si ha allora:

$$x = V_{0x} * t \quad y = V_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2$$

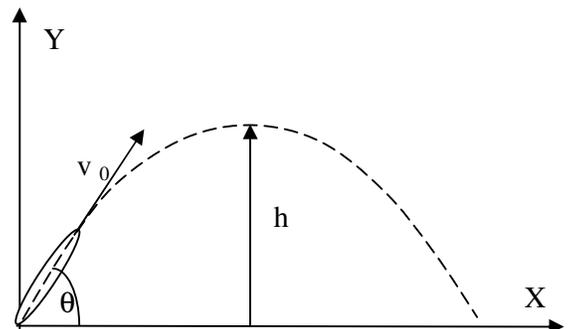
$$V_x = V_{0x} \quad V_y = V_{0y} - g * t$$

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

si ha anche :

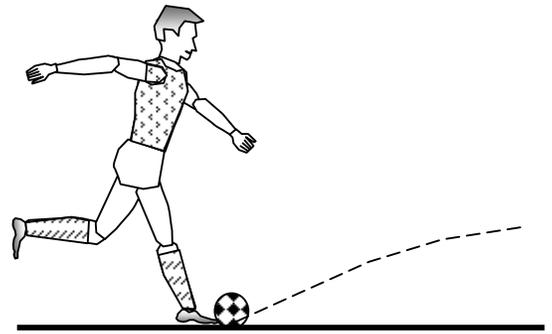
$$V_y^2 = V_{0y}^2 - 2 * g * y$$

L'ultima relazione deriva dal principio di conservazione dell'energia, le prime dall'applicazione delle leggi del moto uniforme per la componente x e del moto uniformemente accelerato per la componente y .



I lanci nello sport.

Le discipline di lancio, peso, disco, giavellotto, martello sono basate sulla ricerca della massima gittata. Le tecniche sono profondamente differenti nelle varie discipline. Non è compito di questo testo trattarle in dettaglio dal punto di vista della biomeccanica. E' comunque necessario comprendere quali sono le variabili che influiscono sulla lunghezza del lancio e come si può agire su queste per migliorare le prestazioni. Trattiamo il problema nel modo più generale supponendo che l'atleta lasci l'attrezzo in un punto dello spazio che assumeremo come origine delle coordinate. Ricavando il valore di t dalla prima relazione e sostituendo nella seconda si ha:

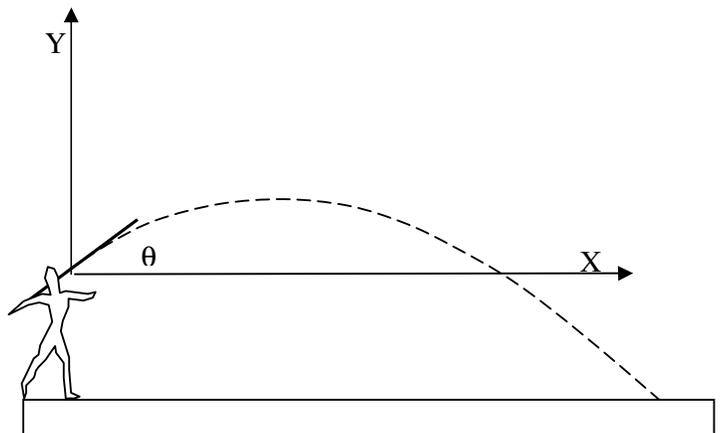


$$y = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} * x - \frac{1}{2} * \frac{g}{V_{0x}^2} * x^2$$

La relazione precedente è l'equazione di una parabola che rappresenta la traiettoria del moto dell'attrezzo. La parabola interseca l'asse X in due punti di ascissa :

$$x = 0 \quad x = \frac{2 * V_{0x} * V_{0y}}{g} = \frac{2 * \sin \vartheta * \cos \vartheta * V_0^2}{g} = \frac{\sin(2\vartheta) * V_0^2}{g}$$

Nel caso in cui il punto di partenza e quello di arrivo dell'attrezzo siano alla stessa quota, come nel caso del calciatore che colpisce la palla sul terreno, l'ascissa del secondo punto rappresenta anche la gittata. In questo caso imponendo la condizione di massimo per l'ascissa x del punto di arrivo si può vedere che x diventa massimo quando $\sin(2\vartheta) = 1$, cioè per $\vartheta = 45^\circ$. L'angolo di massima gittata nasce da un compromesso tra l'esigenza di aumentare il tempo di



volo dell'attrezzo, aumento che si ottiene facendo crescere l'angolo ϑ , e quella di aumentare la componente orizzontale della velocità, aumento che si ottiene diminuendo l'angolo ϑ .

Quando invece il punto di arrivo non è alla stessa quota del punto di partenza, come nel caso del lancio del giavellotto, inserendo la quota del punto di arrivo nell'ultima equazione si ottiene:

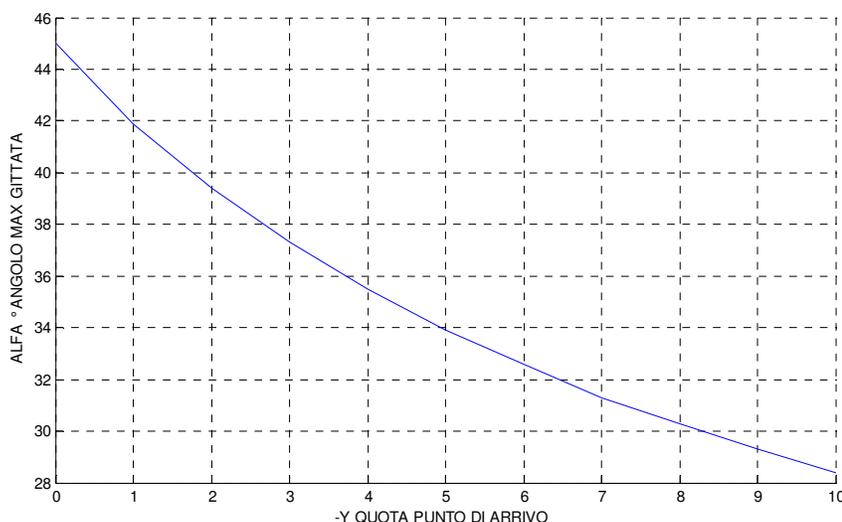
$$V_y^2 = V_{0y}^2 - 2gy \quad V_y = \pm \sqrt{V_{0y}^2 - 2gy} \quad t = \frac{V_0^y - V_y}{g} = \frac{V_{0y} \pm \sqrt{V_{0y}^2 - 2gy}}{g}$$

$$x = V_{0x} * t = \frac{V_{0x} * V_{0y} \pm \sqrt{V_{0x}^2 * V_{0y}^2 - V_{0x}^2 * 2gy}}{g} =$$

$$= \frac{V_0^2 * \sin(\vartheta) * \cos(\vartheta) \pm \sqrt{V_0^4 * \sin^2(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - V_0^2 \cos^2(\vartheta) * 2gy}}{g}$$

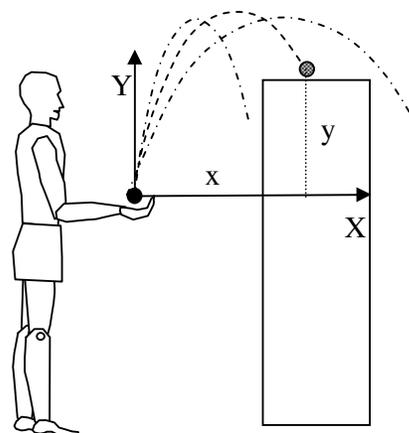
Il doppio segno nell'equazione precedente corrisponde al fatto che per soddisfare l'equazione del bilancio di energia potenziale e cinetica V_y può assumere segno positivo e negativo. Nei calcoli che seguono si terrà in considerazione soltanto il segno positivo.

Inserendo l'ordinata y del punto di arrivo (negativa nel caso in figura) nell'ultima equazione si ottiene l'ascissa x del punto di arrivo che corrisponde alla gittata. E' interessante notare che la gittata massima corrispondente ad una certa velocità V_0 non si ottiene più con angoli di 45° . Il diagramma che segue mostra i valori dell'angolo di gittata massima corrispondenti a diversi valori di y , riportati per comodità nel disegno con i segni cambiati. L'angolo di massima gittata decresce all'aumentare in valore assoluto della quota y . Nel caso del lancio del giavellotto per cui $y = -2$ m l'angolo di gittata massima è circa $39,5^\circ$.



Nelle considerazioni precedenti si è trascurata la resistenza dell'aria e altri effetti che possono influire sulla lunghezza del lancio, come effetti di rotazione, azioni aerodinamiche e attrito. Se si dovesse tener conto di tutte i fattori che influenzano il volo del corpo, resistenza dell'aria, effetti giroscopici, variazione di assetto del corpo, la soluzione delle equazioni del moto si potrebbe raggiungere soltanto con calcoli alquanto complessi.

Si consideri ora un altro caso importante nel dominio del lancio balistico. Si voglia lanciare un oggetto in modo tale che atterri in un punto, le cui coordinate rispetto all'origine, posta nel punto iniziale della traiettoria, siano x, y . Le variabili su cui si può operare sono la velocità iniziale e l'angolo di lancio. Si tenga presente che se questi parametri non sono valutati accuratamente l'obbiettivo del lancio viene mancato. La pallina ricade prima del piano di atterraggio, o lo supera e ricade sul terreno. Per la velocità iniziale è necessario considerare che essa deve essere almeno tale da permettere che l'apice della traiettoria sia più alto della quota y , ma non molto più alto per non generare velocità di ricaduta troppo alte sul piano di atterraggio. Per il bilancio di



energia cinetica e potenziale si ha: $\frac{V_{0y}^2}{2g} \geq y$.

Ammettendo a titolo esemplificativo di porre $\frac{V_{0y}^2}{2g} = 1,1 * y$ che corrisponde al fatto che l'apice della parabola superi la quota y del 10 % si ha:

$$V_{0y}^2 = 2,2gy \quad e \quad y = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad da \quad cui \quad \frac{1}{2}gt^2 - t + y = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado e considerando soltanto il valore più grande di t in quanto corrispondente al secondo passaggio della palla sul livello di altezza y si ha:

$$t = \frac{V_{0y} + \sqrt{V_{0y}^2 - 2g * y}}{g} = \frac{V_{0y} + \sqrt{0,2 * V_{0y}^2}}{g} = 1,45 \frac{V_{0y}}{g}$$

Trovato il tempo t si otterrà:

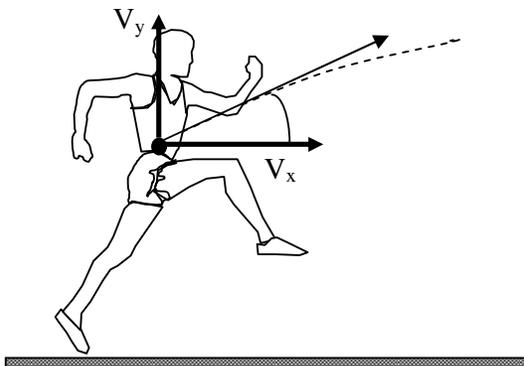
$$V_{0x} = \frac{x}{t} \quad \tan \theta = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}$$

Nel caso in cui la quota y sia di 2 m e la distanza x di 1 m si ha:

$$V_{0y}^2 = 2,2 * 9,81 * 2 = 43,16 m^2 / s^2 \quad e \quad V_{0y} = 6,57 m / s$$

$$t = 1,45 \frac{6,57}{g} = 0,97 s \quad V_{0x} = \frac{1}{0,97} = 1,03 m / s \quad \tan \theta = \frac{6,57}{1,03} = 6,38 \quad \theta = 81,09^\circ$$

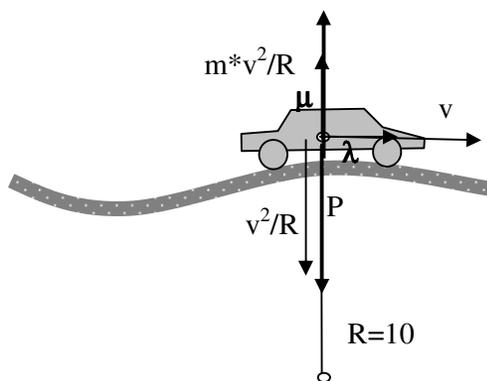
Il salto in lungo.



Senza entrare nel merito delle tecniche di esecuzione del salto che appartengono al dominio delle scienze dello sport vogliamo semplicemente sottolineare i principali parametri che influiscono sulla lunghezza del salto. Si tratta anche in questo caso di un moto balistico nel quale la massa del corpo dell'atleta può essere considerata come un punto materiale concentrato nel baricentro del corpo. La lunghezza del salto dipende dalla combinazione della componente orizzontale della velocità e di quella verticale. La componente orizzontale viene ottenuta nella rincorsa che precede il salto. Da questo deriva che un parametro fondamentale per ottenere una buona prestazione è un'elevata velocità della rincorsa. La componente verticale viene ottenuta da un movimento complesso della gamba di battuta, costituito da un'estensione rapida dell'anca, dall'estensione del ginocchio e dalla flessione plantare della caviglia. Questi movimenti elementari contribuiscono a generare una forza diretta verso l'alto a cui corrisponde una velocità ascensionale al momento dello stacco. Considerando l'atleta come un punto materiale l'angolo iniziale della traiettoria dovrebbe essere intorno ai 40° per ottenere la massima lunghezza del salto per una certa velocità al distacco. Le forze muscolari di cui si è parlato non riescono a raggiungere livelli sufficienti per ottenere quest'angolo. Nella pratica sportiva la componente orizzontale della velocità è intorno ai 9 m/s per un atleta di medie prestazioni, corrispondente al tempo di 11 s nei 100 m di corsa. La tabella seguente mostra per varie combinazioni delle due componenti i valori del modulo della velocità V_0 e la lunghezza del salto ottenuto. In corrispondenza di valori vicini al record mondiale di 8,95 m l'angolo di distacco risulta pari a $23,26^\circ$.

| | V _y (m/s) | 2,68 | 3,00 | 3,36 | 3,67 | 4,00 | 4,21 |
|----------------------|----------------------|---------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| V _x (m/s) | | LUNGHEZZA DEL SALTO (V ₀) | | | | | |
| 5,95 | | 3,73 (6,52) | 4,08 (6,66) | 4,47 (6,81) | 4,82 (6,99) | 5,19 (7,16) | 5,43 (7,28) |
| 6,26 | | 3,92 (6,81) | 4,29 (6,94) | 4,70 (7,10) | 5,07 (7,25) | 5,45 (7,43) | 5,72 (7,54) |
| 6,58 | | 4,13 (7,10) | 4,51 (7,23) | 4,94 (7,38) | 5,33 (7,53) | 5,74 (7,70) | 6,01 (7,80) |
| 6,90 | | 4,32 (7,40) | 4,73 (7,52) | 5,18 (7,67) | 5,59 (7,81) | 6,02 (7,97) | 6,30 (8,07) |
| 7,21 | | 4,53 (7,69) | 4,95 (7,80) | 5,42 (7,95) | 5,84 (8,09) | 6,29 (8,24) | 6,58 (8,34) |
| 7,53 | | 4,72 (7,99) | 5,17 (8,10) | 5,66 (8,24) | 6,10 (8,37) | 6,57 (8,52) | 6,88 (8,62) |
| 7,84 | | 4,92 (8,28) | 5,38 (8,39) | 5,89 (8,52) | 6,35 (8,65) | 6,84 (8,80) | 7,16 (8,89) |
| 8,16 | | 5,11 (8,58) | 5,60 (8,69) | 6,13 (8,82) | 6,61 (8,94) | 7,12 (9,08) | 7,45 (9,17) |
| 8,47 | | 5,32 (8,88) | 5,81 (8,98) | 6,36 (9,11) | 6,86 (9,23) | 7,39 (9,36) | 7,74 (9,45) |
| 8,79 | | 5,51 (9,18) | 6,03 (9,28) | 6,61 (9,40) | 7,12 (9,52) | 7,67 (9,65) | 8,03 (9,74) |
| 9,10 | | 5,70 (9,48) | 6,24 (9,58) | 6,84 (9,70) | 7,38 (9,81) | 7,94 (9,94) | 8,31 (10,02) |
| 9,42 | | 5,91 (9,79) | 6,46 (9,88) | 7,08 (10,00) | 7,63 (10,10) | 8,22 (10,23) | 8,60 (10,31) |
| 9,73 | | 6,10 (10,09) | 6,67 (10,18) | 7,31 (10,29) | 7,89 (10,39) | 8,49 (10,51) | 8,89 (10,59) |
| 10,05 | | 6,30 (10,40) | 6,89 (10,48) | 7,55 (10,59) | 8,15 (10,70) | 8,77 (10,77) | 9,18 (10,89) |
| 10,36 | | 6,49 (10,70) | 7,10 (10,78) | 7,79 (10,89) | 8,40 (10,99) | 9,04 (11,10) | 9,46 (11,17) |
| 10,68 | | 6,70 (11,01) | 7,32 (11,09) | 8,03 (11,19) | 8,66 (11,29) | 9,32 (11,40) | 9,76 (11,47) |
| | H CG | 0,37 | 0,46 | 0,57 | 0,68 | 0,81 | 0,90 |
| | T (s) | 0,627 | 0,686 | 0,752 | 0,811 | 0,873 | 0,914 |

Esempio



Un'auto percorre a velocità v costante una strada che forma un dosso con raggio di curvatura pari a 10 m. Qual è il valore della velocità per cui la vettura perde completamente aderenza col terreno? -

R .

L'accelerazione della vettura alla sommità del dosso è quella di un punto materiale che percorre una traiettoria curva con velocità costante. L'unica componente di accelerazione presente è quella centripeta, diretta dall'auto verso il centro di curvatura del dosso,

$$\mathbf{a}_p = -\frac{v^2}{R} \boldsymbol{\mu} \quad \text{Se } |\mathbf{a}_p| = \frac{v^2}{R} = g \text{ la forza d'inerzia,}$$

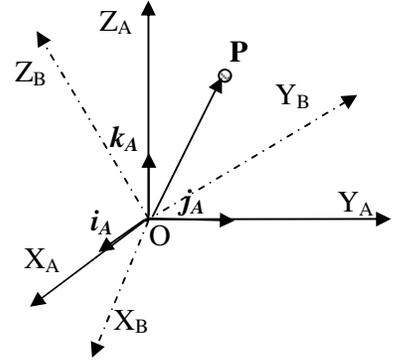
centrifuga $-\mathbf{m}\mathbf{a}_p = mg\boldsymbol{\mu}$ sarà un vettore eguale e di segno contrario alla forza peso del veicolo che tenderà quindi a perdere aderenza col terreno. In modulo $|v| = \sqrt{gR} = 35,65 \text{ km/h}$.

Moto relativo.

Si considerino due sistemi di riferimento con l'origine in comune, il primo (A) fisso, il secondo (B) mobile. Si consideri anche un punto P , mobile rispetto ad ambedue i riferimenti. Il passaggio dalle coordinate di P rispetto al sistema (B) a quelle rispetto al sistema (A) è, come di consueto, effettuato attraverso la matrice di rotazione ${}^A_B R$. Si ha:

$${}^A \mathbf{r}_p = {}^A_B R {}^B \mathbf{r}_p$$

Prima di ottenere le espressioni per la velocità ed accelerazione di P rispetto ai due sistemi occorre ricordare che la derivata viene svolta in relazione ad un sistema di riferimento. Svolgere la derivazione rispetto ad un sistema vuol dire calcolare la velocità del punto relativa a quel sistema. Questo implica che se un punto è solidale ad un sistema di riferimento la derivata della sua posizione rispetto a quel sistema sarà nulla. Se quindi scriviamo la posizione di **P** rispetto ad (A) e (B) otteniamo:



$${}^A \mathbf{r}_P = {}^A x_P \mathbf{i}_A + {}^A y_P \mathbf{j}_A + {}^A z_P \mathbf{k}_A$$

$${}^B \mathbf{r}_P = {}^B x_P \mathbf{i}_B + {}^B y_P \mathbf{j}_B + {}^B z_P \mathbf{k}_B$$

Ricordiamo che la velocità di un punto **P** si ottiene derivando il suo vettore posizione. La derivata deve però essere riferita ad un sistema di coordinate. Infatti se deriviamo ${}^B \mathbf{r}_P$ rispetto al sistema (B) dobbiamo assumere questo sistema come fisso ed i versori $\mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B, \mathbf{k}_B$ dovranno essere considerati immutabili in direzione e modulo. Se deriviamo lo stesso vettore rispetto al sistema (A) i versori $\mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B, \mathbf{k}_B$ dovranno essere considerati mobili rispetto a quel sistema di riferimento. Si ha quindi, utilizzando due indici, uno per indicare il sistema rispetto a cui si deriva, l'altro quello di riferimento del vettore che si deriva si ha:

$${}^B \mathbf{v}_P = \frac{{}^B d}{{}^B dt} {}^B \mathbf{r}_P = \frac{{}^B d}{{}^B dt} ({}^B x_P \mathbf{i}_B + {}^B y_P \mathbf{j}_B + {}^B z_P \mathbf{k}_B) = ({}^B \dot{x}_P \mathbf{i}_B + {}^B \dot{y}_P \mathbf{j}_B + {}^B \dot{z}_P \mathbf{k}_B) = {}^B \mathbf{v}_{P,R}$$

$${}^B \mathbf{a}_P = \frac{{}^B d}{{}^B dt} {}^B \mathbf{v}_P = ({}^B \ddot{x}_P \mathbf{i}_B + {}^B \ddot{y}_P \mathbf{j}_B + {}^B \ddot{z}_P \mathbf{k}_B) = {}^B \mathbf{a}_{P,R}$$

Nelle espressioni precedenti l'indice R posto sul simbolo della velocità ed accelerazione del punto P sta ad indicare il carattere di velocità ed accelerazione relativa, cioè rispetto ad un sistema mobile. Se ora deriviamo lo stesso vettore \mathbf{r}_B rispetto al sistema A otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{{}^A d}{{}^A dt} {}^B \mathbf{r}_P &= \frac{{}^A d}{{}^A dt} ({}^B x_P \mathbf{i}_B + {}^B y_P \mathbf{j}_B + {}^B z_P \mathbf{k}_B) = ({}^B \dot{x}_P \mathbf{i}_B + {}^B \dot{y}_P \mathbf{j}_B + {}^B \dot{z}_P \mathbf{k}_B) + \\ &+ ({}^B \dot{x}_P * (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_B) + ({}^B \dot{y}_P * (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_B) + ({}^B \dot{z}_P * (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_B))) = {}^B \dot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\omega} \times {}^B \mathbf{r}_P = {}^B \mathbf{v}_{P,R} + {}^B \mathbf{v}_{P,T} \end{aligned}$$

Il risultato precedente dice che la derivata rispetto al sistema fisso del vettore \mathbf{r}_B è la somma della velocità relativa e di un termine, *velocità di trascinamento*, dovuto alla rotazione del sistema di riferimento (B) rispetto al sistema (A). Occorre osservare che la velocità *assoluta* del punto **P** così ottenuta è ancora espressa rispetto al sistema di riferimento (B). Nel seguito eviteremo, per aggirare la complicazione del doppio indice, di derivare rispetto ad un sistema un vettore riferito ad un altro sistema. Nel caso precedente per far coincidere il sistema di derivazione e quello di riferimento del vettore velocità dovremmo utilizzare la matrice di rotazione ${}^A \mathbf{R}_B$, ottenendo infine :

$${}^A \mathbf{v}_P = {}^A \mathbf{R}_B {}^B \dot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{r}_P = {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{v}_{P,R} + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{r}_P = {}^A \mathbf{R}_B {}^B \mathbf{v}_{P,R} + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P$$

Il risultato precedente si può ottenere anche per altra via, utilizzando le matrici di rotazione. Si ha infatti:

$${}^A \mathbf{r}_P = {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{r}_P \quad {}^A \mathbf{v}_P = \frac{d}{dt} ({}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{r}_P) = {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^B \mathbf{r}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}}_P = {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T {}^A \mathbf{r}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}}_P$$

Dall'espressione precedente si deduce che velocità di trascinamento e relativa sono rispettivamente date da:

$${}^A \mathbf{v}_{P,T} = {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T {}^A \mathbf{r}_P \quad {}^A \mathbf{v}_{P,R} = {}^A \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}}_P = 0$$

Ricordando che :

$${}^A \mathbf{R} {}^A \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

e

$${}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T + {}^A \mathbf{R} {}^A \dot{\mathbf{R}}^T = {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T + ({}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T)^T = 0$$

indicando con \mathbf{S} la matrice ${}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T$ si ha:

$$\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = 0$$

La matrice \mathbf{S} è quindi una matrice antisimmetrica della forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Tornando all'espressione della velocità del punto P si ha:

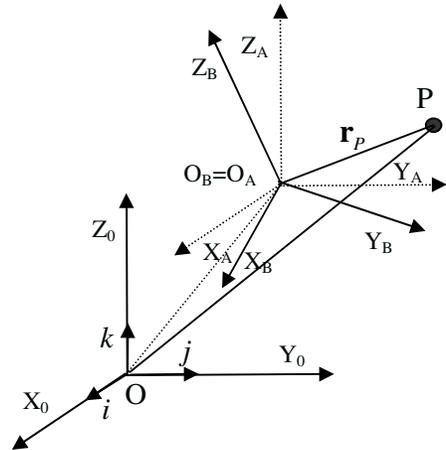
$${}^A \mathbf{v}_P = \mathbf{S} {}^A \mathbf{r}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \dot{\mathbf{r}}_P = \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{v}_P$$

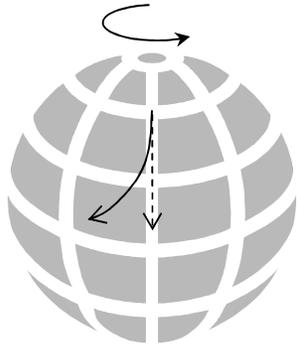
Come è stato detto il primo termine prende il nome di velocità di trascinamento, quella cioè che il punto P avrebbe se fosse solidale al sistema B e trascinato da questo nel suo moto rispetto al sistema A. Il secondo termine è la velocità di P rispetto al sistema mobile. Ricordando le regole di derivazione dei vettori si può facilmente ricavare l'accelerazione:

$$\begin{aligned} {}^A \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P) + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \dot{\mathbf{r}}_P + {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^B \mathbf{v}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{a}_P = \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P) + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{v}_P + {}^A \dot{\mathbf{R}} {}^A \mathbf{R}^T {}^A \mathbf{v}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{a}_P \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P) + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{v}_P + {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{a}_P = \\ &= \{ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P) \} + \{ {}^A \mathbf{R} {}^B \mathbf{a}_P \} + \{ 2 * (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{v}_P) \} = \mathbf{a}_{P,T} + \mathbf{a}_{P,R} + \mathbf{a}_{P,C} \end{aligned}$$

Il primo termine tra parentesi graffe rappresenta l'accelerazione di trascinamento, costituita dalla somma dell'accelerazione centripeta e di quella tangenziale. Il secondo rappresenta l'accelerazione relativa del punto P rispetto al sistema mobile. L'ultimo termine è l'accelerazione di Coriolis, la cui esistenza viene giustificata nel seguito.

Nel caso in cui il sistema mobile abbia rispetto al sistema fisso un moto di traslazione oltre che di rotazione, occorre aggiungere nelle espressioni precedenti la velocità e l'accelerazione dell'origine del sistema mobile rispetto al sistema fisso. Nella figura a fianco si sono riportati per chiarezza tre





sistemi di riferimento. Il primo (0) è fisso, il secondo (A) trasla rispetto al sistema fisso, il terzo (B) trasla e ruota rispetto ad (A) con cui ha l'origine in comune. Si otterrà quindi:

$${}^0 \mathbf{v}_P = \{ \mathbf{v}_{O_B} + \boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P \}^T + \{ {}^A \mathbf{R}^B \mathbf{v}_P \}^R$$

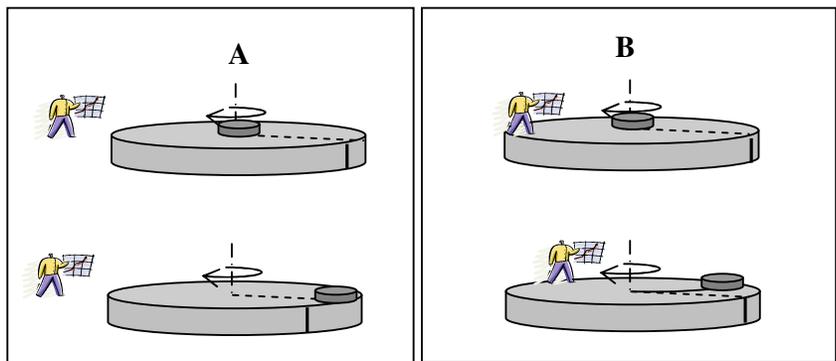
$${}^0 \mathbf{a}_P = \{ \mathbf{a}_{O_B} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{r}_P) \}^T + \{ {}^A \mathbf{R}^B \mathbf{a}_P \}^R + \{ 2 * (\boldsymbol{\omega} \times {}^A \mathbf{v}_P) \}^C$$

Nelle relazioni precedenti gli indici posti a destra delle parentesi indicano rispettivamente i termini di trascinato, relativi e di

Coriolis.

Per cercare di spiegare con un esempio l'accelerazione di Coriolis si immagina che un osservatore fisso veda una piattaforma ruotare intorno al suo asse, Fig. A. Sulla piattaforma è posto un dischetto circolare che viene lanciato radialmente verso la periferia. Si ammetta che tra il dischetto

e la piattaforma non esista alcuna azione di attrito e trascinato. Quando il dischetto raggiunge la periferia l'osservatore fisso lo ha visto percorrere una traiettoria rettilinea mentre la piattaforma ha ruotato di un certo angolo. Se l'osservatore sale sul

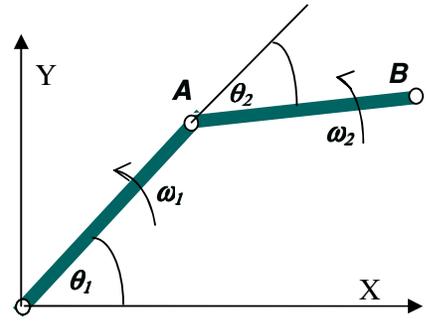


disco e si compie lo stesso esperimento precedente lanciando il dischetto verso la periferia della piattaforma (figura B), l'osservatore (questa volta mobile) vede il dischetto deviare dalla traiettoria rettilinea e percorrere una linea curva, perché i punti della piattaforma che tocca ruotano sempre più veloci man mano che il dischetto si allontana dal centro. L'osservatore non potrà che giustificare lo scostamento dalla traiettoria di un oggetto a cui non è applicata alcuna forza se non con la presenza di un'accelerazione e quindi di una forza fittizia tangenziale, tanto maggiore quanto maggiori sono la velocità relativa del dischetto rispetto alla piattaforma e la velocità angolare del disco.

Le forze di Coriolis sono responsabili della deviazione dei venti dalla direzione corrispondente alla linea delle isobare, come vorrebbe l'aerodinamica, in quanto le masse d'aria in movimento rispetto alla terra, che è in rotazione antioraria, se l'attrito con la superficie della terra non è rilevante, subiscono una deviazione della traiettoria. Questa deviazione è in senso orario nell'emisfero boreale in senso antiorario nell'emisfero australe. L'effetto è quello di generare una traiettoria curva delle masse d'aria in movimento che si allontanano in qualche misura dalla direzione delle isobare formando così la tipica circuitazione ciclonica e anticiclonica. Nella figura a fianco è rappresentata la rotta reale rispetto alla terra di un aereo che vola da nord verso sud secondo le indicazioni della bussola. La rotazione della terra farà in modo che la traiettoria sia, per un osservatore terrestre, una linea curva inclinata a destra rispetto alla linea di volo desiderata. Chiaramente un'osservatore esterno, non basato sulla terra, vedrebbe la traiettoria dell'aereo seguire una linea meridiana. Le accelerazioni di Coriolis sono quindi accelerazioni apparenti introdotte per giustificare il comportamento del corpo mobile rispetto ad un sistema di riferimento rotante. .

Esempio 1

Il sistema articolato in figura è costituito da due aste unite mediante un giunto rotoidale in A, mentre in O un altro giunto rotoidale collega la prima asta al telaio. Sono dati le lunghezze l_1, l_2 delle aste, gli angoli α_1, α_2 e le velocità angolari delle due aste, tenendo presente che la velocità angolare $\omega_2 = d\theta_2/dt$ è quella della seconda asta rispetto alla prima. La velocità angolare della seconda asta rispetto al sistema fisso è infatti data dalla somma $\omega_1 + \omega_2$.



Si vogliono determinare velocità ed accelerazione del punto B. Ricordando quanto detto a proposito della derivazione di vettori variabili si ha:

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times ((\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{AB}) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \mathbf{r}_{AB}$$

Per commentare le espressioni precedenti si può osservare che il punto A si muove di moto circolare intorno ad O con velocità $\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A$ mentre il punto B ruota intorno ad A con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Possiamo quindi dire secondo il teorema di Rivals che **la velocità di una punto B appartenente ad un corpo rigido in moto generale è pari alla velocità di un altro punto A del corpo sommata con la velocità di B nel moto relativo di B rispetto ad A**. Nel nostro caso il moto relativo di B rispetto ad A è proprio un moto di rotazione con velocità $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. L'espressione della velocità del punto B può essere elaborata come segue:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_{t,B} + \mathbf{v}_{r,B}$$

La velocità di B può quindi anche essere pensata come somma di due termini, il primo, velocità di trascinalamento, rappresenta la velocità che il punto B avrebbe se l'asta AB fosse solidale all'asta OA e lo snodo in A non esistesse, il secondo termine è dovuto alla velocità relativa dell'asta AB o del sistema mobile ad essa solidale rispetto all'asta OA.

Esiste anche una terza possibilità per calcolare la velocità e l'accelerazione del punto B, derivando direttamente le componenti del vettore \mathbf{r}_B . Abbiamo in questo caso:

$$\mathbf{r}_B = \begin{Bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \begin{Bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1)\omega_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2) \\ l_1 \cos(\theta_1)\omega_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{d^2\mathbf{r}_B}{dt^2} = \begin{Bmatrix} -l_1 \cos(\theta_1) \omega_1^2 - l_1 \sin(\theta_1) \dot{\omega}_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2)^2 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) \\ -l_1 \sin(\theta_1) \omega_1^2 - l_1 \cos(\theta_1) \dot{\omega}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\omega_1 + \omega_2)^2 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2) \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \mathbf{a}_A + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times ((\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_{AB}) + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \mathbf{r}_{AB}$$

Sono così verificate le espressioni trovate precedentemente. Il teorema di Rivals si presta bene a calcoli di velocità ed accelerazione in sistemi articolati in quanto le procedure relative possono essere agevolmente trascritte in un programma per l'elaboratore. Un approccio più generale al

calcolo delle velocità dei punti di un sistema costituito da più corpi si ha ricorrendo alle matrici di trasferimento. Utilizzando l'esempio delle due aste riportato sopra ricordiamo che:

$${}^0\mathbf{r}_B = {}^0\mathbf{T} * {}^2\mathbf{r}_B$$

La relazione precedente mostra che la posizione del punto B rispetto al sistema di base è il prodotto di una matrice di trasformazione ${}^0\mathbf{T}$ dipendente dagli angoli θ_1, θ_2 variabili nel tempo e di un vettore ${}^2\mathbf{r}_B$ che essendo il punto B solidale al sistema di riferimento 2 non varia nel tempo. Si ha allora semplicemente:

$$\mathbf{v}_B = \frac{\partial}{\partial t} ({}^0\mathbf{T}) * {}^2\mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} ({}^0\mathbf{T}) * {}^2\mathbf{r}_B$$

Nel caso in esame abbiamo :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} &= {}^0\mathbf{T} * {}^1\mathbf{T} \begin{Bmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\vartheta_1 & -s\vartheta_1 & 0 & 0 \\ s\vartheta_1 & c\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta_2 & -s\vartheta_2 & 0 & l_1 \\ s\vartheta_2 & c\vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\vartheta_{12} & -s\vartheta_{12} & 0 & l_1c\vartheta_1 \\ s\vartheta_{12} & c\vartheta_{12} & 0 & l_1s\vartheta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Derivando si ha:

$${}^0\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} -s\vartheta_{12}\omega_{12} & -c\vartheta_{12}\omega_{12} & 0 & -l_1s\vartheta_1\omega_1 \\ -c\vartheta_{12}\omega_{12} & -s\vartheta_{12}\omega_{12} & 0 & l_1c\vartheta_1\omega_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1s\vartheta_1\omega_1 - s\vartheta_{12}\omega_{12}l_2 \\ -l_1s\vartheta_1\omega_1 - c\vartheta_{12}\omega_{12}l_2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} -c\vartheta_{12}\omega_{12}^2 - s\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12} & -s\vartheta_{12}\omega_{12}^2 - c\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12} & 0 & -l_1c\vartheta_1\omega_1^2 - l_1s\vartheta_1\dot{\omega}_1 \\ -s\vartheta_{12}\omega_{12}^2 - c\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12} & -c\vartheta_{12}\omega_{12}^2 - s\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12} & 0 & -l_1s\vartheta_1\omega_1^2 - l_1c\vartheta_1\dot{\omega}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

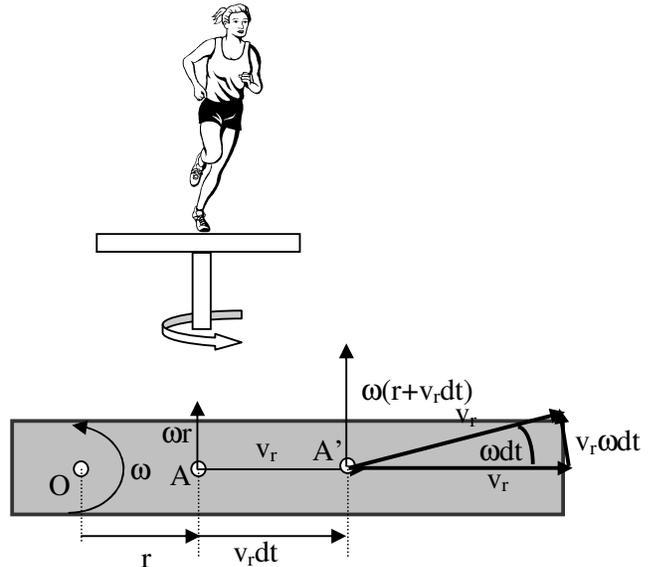
$$= \begin{Bmatrix} -l_1(c\vartheta_1\omega_1^2 + s\vartheta_1\dot{\omega}_1) - l_2(c\vartheta_{12}\omega_{12}^2 + s\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12}) \\ -l_1(s\vartheta_1\omega_1^2 + c\vartheta_1\dot{\omega}_1) - l_2(s\vartheta_{12}\omega_{12}^2 + c\vartheta_{12}\dot{\omega}_{12}) \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Con $\vartheta_{12} = \vartheta_1 + \vartheta_2$ $\omega_{12} = \omega_1 + \omega_2$. E' immediato verificare che le espressioni ottenute sono identiche a quelle ricavate col teorema di Rivals o con le leggi del moto relativo. Nel caso rappresentato non è presente l'accelerazione di Coriolis in quanto il punto B è solidale al sistema di riferimento mobile.

Esempio 2

Riprendiamo il caso già presentato di un atleta che corre su una pedana con velocità di 4 m/s mentre la pedana ruota con velocità angolare costante $\omega = 0,2$ rad/s. Si vuole determinare la velocità e l'accelerazione dell'atleta rispetto ad un sistema fisso, quando l'atleta dista 3m dall'asse di rotazione della pedana.

La velocità del punto A è la somma della velocità di trascinamento, dovuta alla rotazione della pedana, e della velocità relativa, quella dell'atleta rispetto alla pedana. L'accelerazione di A è dovuta alla variazione nel tempo di queste due componenti. La velocità di trascinamento (vedi figura sopra) cambia perché il punto A si sposta nell'intervallo di tempo infinitesimo dt in A' e la velocità di trascinamento cambia in modulo dal valore ωr al valore $\omega(r+dr) = \omega(r+v_r dt)$ La componente di accelerazione dovuta a questa variazione è quindi, in modulo:



$$a_1 = \frac{dv}{dt} = \frac{\omega v_r dt}{dt} = \omega v_r$$

Vettorialmente, poiché a_1 è normale ad ω e v_r , si ha $\mathbf{a}_1 = \omega \times \mathbf{v}_r$. La seconda componente di accelerazione è dovuta al fatto che la velocità relativa, pur costante in modulo, varia in direzione a causa della rotazione della pedana. Si ha quindi per la seconda componente di accelerazione:

$$a_2 = \frac{dv_r}{dt} = \frac{\omega v_r dt}{dt} = \omega v_r \quad \text{vettorialmente si ha ancora } \mathbf{a}_2 = \omega \times \mathbf{v}_r.$$

L'accelerazione complessiva di A è la somma vettoriale delle due componenti \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 . Si ha quindi:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2\omega \times \mathbf{v}_r$$

L'accelerazione prende il nome di accelerazione di Coriolis dal nome dell'ingegnere militare F. Coriolis che mise in evidenza questa componente. Passando ai valori numerici la velocità dell'atleta rispetto al sistema fisso è la somma vettoriale della velocità di trascinamento e di quella relativa. Si tenga presente che poiché la velocità di trascinamento è riferita al sistema fisso e quella relativa al sistema mobile le due velocità non possono essere sommate vettorialmente se prima non vengono riferite allo stesso sistema di coordinate. In questo caso specifico i due sistemi sono paralleli e si ha quindi:

$$\mathbf{v}_A^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0,6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'accelerazione è la somma dell'accelerazione di trascinamento, dovuta alla rotazione della pedana, di quella relativa e dell'accelerazione di Coriolis. L'accelerazione relativa è nulla perché si è supposto che l'atleta corra con velocità costante rispetto alla pedana, l'accelerazione di trascinamento è la somma delle due componenti tangenziale, nulla perché si è supposta la velocità angolare della pedana costante, e centripeta. Si ha quindi:

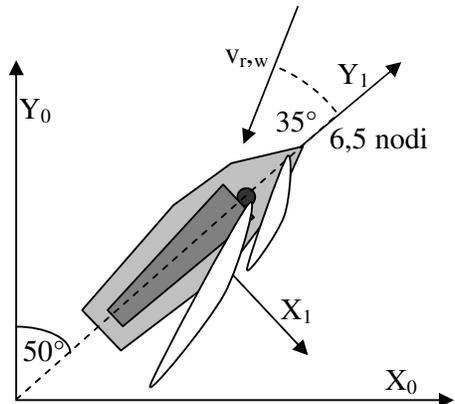
$$\mathbf{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,12 \\ 1,2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esempio 3

Una barca a vela si muove nella direzione indicata, di bolina, contro un vento da nord e uno strumento di bordo indica una velocità della barca di 6,5 nodi. Un indicatore di direzione del vento (un piccolo nastro appeso ad una sartia) mostra che la direzione del vento apparente è di 35° rispetto all'asse della barca. Qual' è la velocità reale del vento ?.

R. $v = 14,40$ nodi.

Si tratta di un problema la cui soluzione è basata sull'espressione della velocità nel moto relativo, prima presentata. Assumendo un sistema di assi fisso ed uno solidale alla barca, come in figura, si ha:



$${}^0\mathbf{v}_w = {}^0\mathbf{R}^1 \mathbf{v}_w + {}^0\mathbf{v}_B$$

l'espressione precedente mostra che la velocità del vento è data dalla somma vettoriale della velocità del vento rispetto alla barca, riportata al sistema X_0, Y_0 , e della velocità della barca, espressa sempre rispetto al sistema fisso. Si ha quindi:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ {}^0v_{w,Y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-50) & -\sin(-50) & 0 \\ \sin(-50) & \cos(-50) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1v_w \sin(35) \\ -{}^1v_w \cos(35) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6,5 \sin(50) \\ 6,5 \cos(50) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la relazione vettoriale scritta sopra porta a due relazioni scalari utili (la terza è un'identità), nelle due incognite ${}^1v_w, {}^0v_{w,Y}$. Svolti i semplici calcoli, si trova:

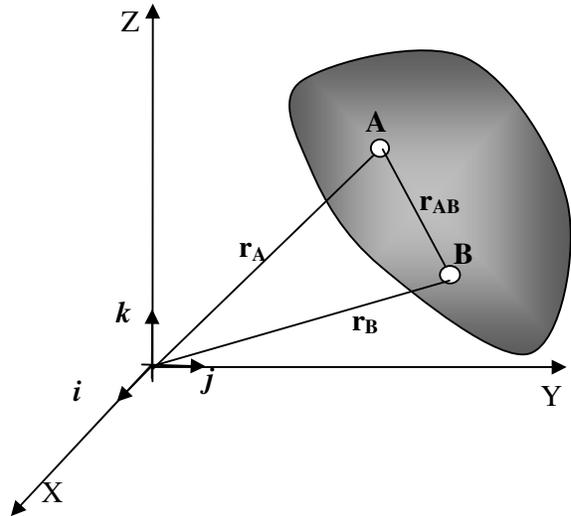
$${}^1v_w = 19,23 \text{ nodi} \quad {}^0v_{w,Y} = -14,4 \text{ nodi}$$

Il nodo (in Inglese knot) è una misura di velocità usata nella navigazione. Esso equivale a 1,851 km/h.

In tutti gli esempi presentati il corpo in esame è stato considerato come un punto materiale, identificando cioè il corpo con il suo baricentro.

2.2 CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

Abbiamo visto che la cinematica del punto prescinde dall'estensione del corpo assimilandolo ad un punto dotato della massa del corpo. L'operazione che comunemente si fa è quella di considerare come punto materiale equivalente il baricentro del corpo in cui si supponga concentrata tutta la massa. E' opportuno notare che questo non produce un sistema dinamicamente equivalente al corpo in quanto due sistemi equivalenti hanno lo stesso baricentro, la stessa massa e la stessa matrice d'inerzia rispetto al baricentro. In questo caso se soggetti allo stessa legge del moto i due sistemi avranno la stessa energia cinetica di traslazione. Un punto materiale non ha in momento d'inerzia, per questo non può essere dinamicamente equivalente ad un corpo esteso. Tuttavia in molti casi la semplificazione presenta vantaggi pratici e porta ad una notevole semplificazione dell'analisi. Se si vuole considerare un corpo rigido nella sua capacità di traslare e ruotare nello stesso tempo, la trattazione parte dalla considerazione che la posizione di un corpo rigido nello spazio è definita da 6 parametri. Se, ad esempio, al corpo è solidale un sistema mobile di coordinate, i 6 parametri possono essere le coordinate dell'origine e tre angoli (ad esempio gli angoli di Eulero), che definiscono la posizione angolare del sistema mobile rispetto al sistema fisso.



Con riferimento alla figura si ha:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

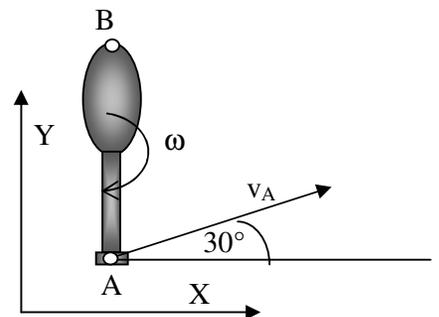
$$\mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB}$$

Le relazioni precedenti indicano, in armonia con la legge di Rivals, che la velocità e l'accelerazione di B si ottengono sommando alla velocità e all'accelerazione di A le componenti di velocità ed accelerazione nel moto relativo (di rotazione) di B rispetto ad A. Ricordiamo che la distanza r_{AB} è costante in quanto rappresenta la distanza tra due punti di un corpo rigido.

Esempio.

Una clava è lanciata da un giocoliere in modo tale che la velocità angolare è di 1,5 rad/s e la velocità del punto A di 3 m/s con inclinazione di 30°, come in figura. Determinare la velocità e l'accelerazione del punto B, essendo la distanza AB pari a 0,30 m.

Assunto un sistema di coordinate Cartesiane come in figura si osservi che l'accelerazione di B è soltanto centripeta perché si ha $\boldsymbol{\omega} = \text{cost}$ e $\mathbf{v}_A = \text{cost}$. Essa è diretta da B verso A.

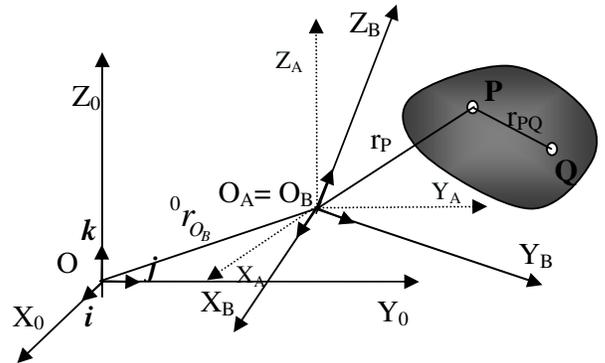


$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} = \begin{Bmatrix} 2,6 \\ 1,5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,0 \\ 1,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,5 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,675 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.2.1 Moto relativo per un corpo rigido.

Quando si vogliono determinare velocità ed accelerazione di un corpo rigido rispetto ad un sistema d'assi fisso, partendo dalla conoscenza di queste quantità rispetto ad un sistema mobile, si impiegano le leggi del moto relativo. Si utilizzeranno i risultati già ottenuti per il punto materiale. Nella figura si sono riportati tre sistemi di riferimento per mostrare i diversi atti di moto che il sistema mobile compie rispetto al sistema fisso. Il moto dei punti P Q che appartengono al corpo in esame è dovuto a tre cause distinte:



1. Un moto di trascinamento dovuto alla traslazione del sistema (A) rispetto al sistema fisso.
2. Un moto di trascinamento dovuto alla rotazione del sistema mobile (B) rispetto ad (A).
3. Un moto relativo dovuto al movimento dei punti P e Q rispetto al sistema (B).

Si tenga presente, nel calcolo della velocità e dell'accelerazione del corpo, che questo ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ intorno al sistema mobile (B), mentre il sistema mobile (B) ruota a sua volta con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto al sistema fisso. Si ha allora:

$${}^0\mathbf{r}_P = {}^0\mathbf{r}_{O_B} + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{r}_P \quad ; \quad {}^0\mathbf{r}_Q = {}^0\mathbf{r}_{O_B} + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{r}_P + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{r}_{PQ}$$

derivando si ha:

$${}^0\mathbf{v}_P = {}^0\mathbf{v}_{O_B} + {}^A\dot{\mathbf{R}}^B \mathbf{r}_P + {}^A\mathbf{R}^B \dot{\mathbf{r}}_P = {}^0\mathbf{v}_{O_B} + {}^A\dot{\mathbf{R}}^B \mathbf{R}^T \mathbf{r}_P + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{v}_P = {}^0\mathbf{v}_{O_B} + \boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_P + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{v}_P$$

$${}^0\mathbf{v}_Q = {}^0\mathbf{v}_P + {}^A\mathbf{R}^B \dot{\mathbf{r}}_{PQ} = {}^0\mathbf{v}_{O_B} + \boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_P + {}^A\mathbf{R}^B \mathbf{v}_P + {}^A\mathbf{R}^B (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_{PQ}$$

Ricordiamo che nelle relazioni precedenti la derivata del vettore \mathbf{r}_{PQ} tiene conto solo della sua rotazione in quanto il vettore stesso è costante in modulo. Ancora una volta la velocità di P può essere determinata sommando alla velocità che P avrebbe se fosse solidale al sistema mobile, la velocità relativa di P rispetto allo stesso sistema mobile. La velocità di Q, sempre rispetto al sistema fisso si ottiene applicando il teorema di Rivals, cioè sommando alla velocità di P quella del moto relativo di Q rispetto a P. E' appena il caso di notare che la velocità angolare del vettore PQ è pari alla somma della velocità angolare del sistema B e della velocità angolare del vettore rispetto a quest'ultimo sistema di riferimento.

Per il calcolo dell'accelerazione ricordiamo che :

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})}{dt} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

Si ha allora, derivando l'espressione delle velocità di P e Q e ricordando le regole di derivazione dei vettori:

$${}^0\mathbf{a}_P = {}^0\mathbf{a}_{O_B} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times {}^A\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\Omega} \times {}^A\dot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_P) + {}^A\mathbf{R} {}^A\mathbf{R}^T {}^A\dot{\mathbf{r}}_P + {}^A\mathbf{R} {}^B\dot{\mathbf{r}}_P =$$

$$= \left\{ {}^0\mathbf{a}_{O_B} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times {}^A\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_P) \right\} + \left\{ {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{a}_P \right\} + \left\{ 2\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{v}_P \right\}$$

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_A + {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{a}_{PQ} = \left\{ \mathbf{a}_{O_B} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times {}^A\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_P) \right\} + \left\{ {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{a}_P \right\} + \left\{ 2\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{v}_P \right\} +$$

$$+ (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times ((\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \times {}^A\mathbf{R} \mathbf{r}_{PQ}) + \frac{d(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})}{dt} \times {}^A\mathbf{R} \mathbf{r}_{PQ} =$$

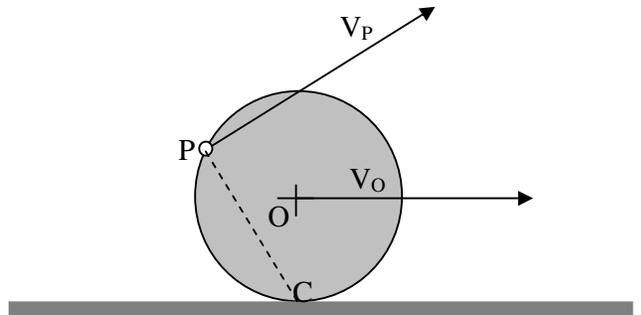
$$= \left\{ {}^0\mathbf{a}_{O_B} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times {}^A\mathbf{r}_Q + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{r}_Q) \right\} + \left\{ {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{r}_{PQ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{r}_{PQ}) \right\} + \left\{ 2\boldsymbol{\Omega} \times {}^A\mathbf{R} {}^B\mathbf{v}_Q \right\}$$

Col solito raggruppamento dei termini di trascinamento, relativi e di Coriolis.

2.2.2 Moti piani

Moto di puro rotolamento

Il punto di contatto tra il disco e la guida si comporta, per un intervallo di tempo infinitesimo, come se il disco ruotasse intorno ad esso. Il punto, in corrispondenza del quale la velocità è nulla, prende il nome di centro della rotazione istantanea. Facciamo osservare però che l'accelerazione in C è diversa da zero. Esiste in ogni caso un punto del disco nel quale l'accelerazione è nulla. Questo punto prende il nome di polo delle accelerazioni. Ricordando il teorema di Rivals:



In un corpo rigido la velocità di un qualunque punto B è eguale a quella di un altro punto A, sommata alla velocità di B nel moto relativo di B rispetto ad A.

Applicando il teorema di Rivals ai punti C ed O del disco si ha:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CO} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CO}$$

Partendo dal modulo della velocità del centro del disco è possibile ricavare il modulo della velocità angolare ω :

$$\omega = v_O/r$$

La velocità di un qualunque punto del disco è:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$$

da quanto precede si può dedurre che la velocità di un qualunque punto del disco è diretta normalmente alla congiungente il centro di istantanea rotazione col punto considerato. Le accelerazioni dei punti del disco possono essere ricavate impiegando il teorema di Rivals. Nel caso in cui siano conosciute velocità e accelerazione del centro O, si ha:

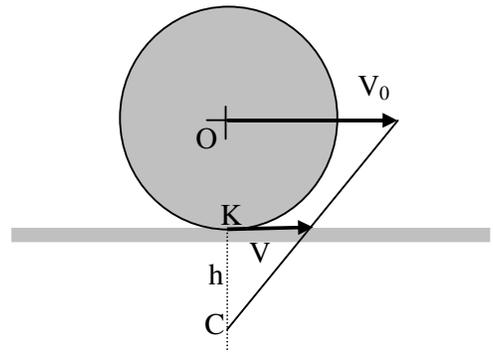
$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP})$$

L'accelerazione del centro istantaneo C risulta:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{OC} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC})$$

nel caso in cui il centro O del disco abbia velocità costante, l'accelerazione angolare è nulla e l'accelerazione di C è rappresentata dal vettore $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC}$, diretto come OC, con verso da C verso O.



Moto di rotolamento con strisciamento

Nel caso in cui si abbia strisciamento sulla guida, il punto di contatto non è più centro di istantanea rotazione.

Se si conoscono le velocità del centro del disco e del punto K del disco che nell'istante considerato è a contatto con la guida, sarà facile trovare la posizione del centro istantaneo. Ricaviamo la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ dalla:

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{KO}$$

Dove la velocità angolare è l'unica incognita. Si può facilmente trovare la distanza lungo la verticale di C dal punto di contatto, ricordando che \mathbf{v}_c è nullo, attraverso la relazione:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CK}$$

Si tenga presente che il verso della velocità \mathbf{v}_k può essere opposto a quello della velocità del centro del disco, come capita ad esempio in una ruota motrice che slitta sul terreno, per un eccesso della coppia applicata alla ruota. Il centro della rotazione istantanea può anche essere trovato con la semplice costruzione grafica indicata in figura.

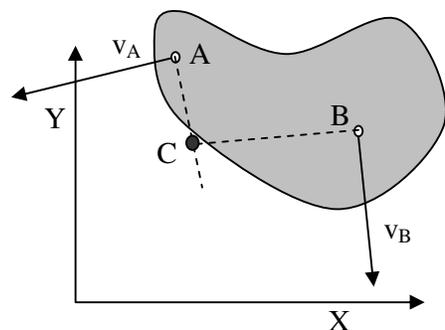
Moto piano generico.

Quando le velocità di tutti i punti di un corpo sono parallele ad un piano, la sezione del corpo con il piano del moto si muove restando su questo. Nel moto piano è sufficiente conoscere le velocità di due punti per ottenere la posizione del centro d'istantanea rotazione, e quindi le velocità di tutti gli altri punti. Il processo può essere grafico o analitico. Per via grafica si tracciano le normali alla direzione delle velocità in due punti in cui questa è conosciuta. L'intersezione delle normali tracciate rappresenta la posizione del centro d'istantanea rotazione. Per via analitica si può scrivere:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AC} = 0$$

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{BC} = 0$$

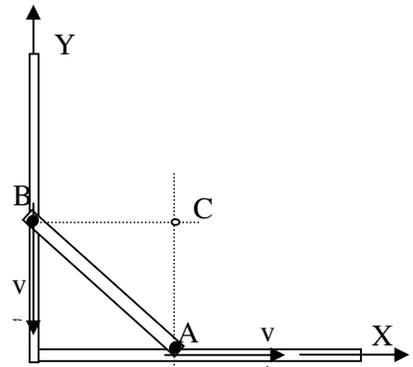
Le due relazioni vettoriali precedenti corrispondono a quattro relazioni scalari (due delle equazioni, quelle concernenti le componenti sull'asse z sono delle identità) con tre incognite, le due coordinate del centro istantaneo e la componente sull'asse Z della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. In effetti, nel moto piano, il vettore



velocità angolare del corpo è sempre perpendicolare al piano del moto.

Esempio.

L'asta AB può muoversi con gli estremi vincolati a scorrere su due guide, orientate rispettivamente come gli assi X ed Y. Siano date le velocità degli estremi A e B dell'asta. In modo grafico la posizione del centro istantaneo per la configurazione del sistema rappresentata in figura, si ottiene tracciando le normali alle velocità dei punti A e B a partire dai punti stessi. Analiticamente si applicheranno le relazioni viste in precedenza:



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_C - x_A \\ y_C - 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_C - 0 \\ y_C - y_B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

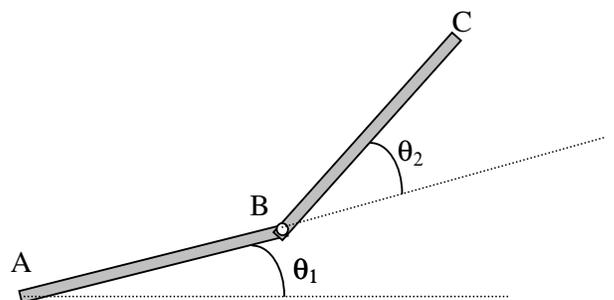
Le due relazioni precedenti danno, in conclusione:

$$\begin{aligned} v_A - \omega y_C &= 0 & x_C &= x_A \\ 0 &= x_C - x_A & y_C &= y_B \\ 0 &= -\omega(y_C - y_B) & \omega &= \frac{v_A}{y_B} = -\frac{v_B}{x_C} \\ 0 &= v_B + \omega x_C \end{aligned}$$

da cui si ricava

2.2.3 Sistemi articolati.

Molti sistemi non sono composti da un unico corpo rigido, ma da più corpi connessi attraverso collegamenti, che chiameremo giunti. La configurazione di un sistema è descritta da una serie di parametri indipendenti (possono essere ad esempio un certo numero di coordinate Cartesiane) che la definiscono completamente. Se il sistema è costituito da un certo numero di corpi liberi, non mutuamente vincolati, il numero di gradi di libertà del sistema è semplicemente pari al numero dei corpi per il numero di gradi di libertà di un singolo corpo, tre per il moto piano, sei per il moto spaziale. Se due corpi sono collegati da un giunto che annulla un certo numero di movimenti elementari nel moto relativo dei due corpi, il numero di gradi di libertà del sistema completo è pari a quello originario, meno il numero di movimenti elementari relativi eliminati dai vincoli. Se un giunto collega più di due corpi il numero di gradi di libertà che esso sottrae si ottiene, considerando tutte le possibili coppie d'elementi che concorrono in quel giunto, meno una. Se ad esempio un giunto sferico collega tre elementi, il numero di gradi di libertà che esso cancella risulta pari a 6. Il sistema complessivo ne mantiene 12.

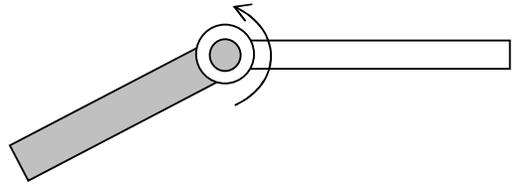


Prima di procedere allo studio di sistemi i cui componenti siano tutti soggetti ad un moto piano, introduciamo la descrizione di alcuni tipi di giunti, con riferimento prima al moto piano e poi al moto generale nello spazio.

Giunti piani

Giunto rotoidale.

Il giunto rotoidale permette la rotazione relativa degli organi che collega, togliendo due gradi di libertà al moto relativo dei due corpi. In altre parole, i corpi collegati dal giunto conservano soltanto un grado di libertà nel moto relativo, quello della rotazione. Se, prima di essere collegati, i corpi avevano ciascuno tre gradi di libertà, quindi complessivamente sei, dopo la rotazione saranno ancora possibili le due traslazioni e la rotazione del complesso dei due corpi collegati, più la rotazione relativa.



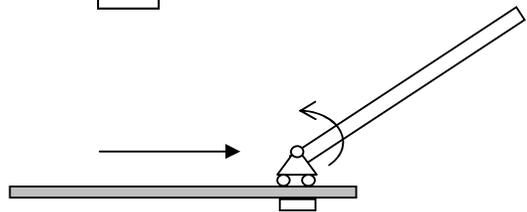
Incastro.

L'incastro unisce due corpi, sopprimendo qualunque possibilità di moto relativo. Al sistema di due corpi così formato restano tre gradi di libertà, due spostamenti e una rotazione. L'incastro cancella quindi tre gradi di libertà.



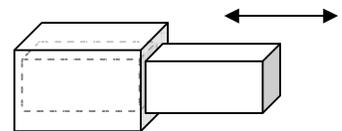
Appoggio semplice.

L'appoggio semplice permette ai due corpi di conservare un movimento di rotazione relativa ed uno di traslazione. Cancella quindi soltanto un grado di libertà, dei sei complessivi che i due corpi possedevano prima di essere collegati.



Giunto prismatico

Il giunto prismatico sopprime due gradi di libertà nel moto piano, in quanto consente soltanto lo scorrimento relativo dei due corpi che esso collega impedendo la rotazione e l'altro scorrimento.

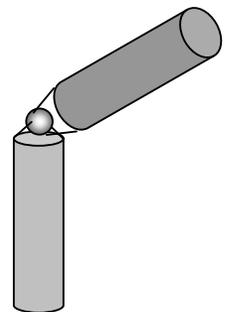


Giunti spaziali.

Per quanto i sistemi articolati in tre dimensioni non siano trattati in questa sede, si ritiene utile menzionare i principali tipi di giunti spaziali, tenendo presente che le loro proprietà possono essere desunte per estensione da quelle dei corrispondenti giunti piani. Considerato che un corpo rigido, nello spazio, ha sei gradi di libertà, tre spostamenti secondo gli assi coordinati e tre rotazioni intorno a questi, possiamo indicare i principali tipi di giunti spaziali:

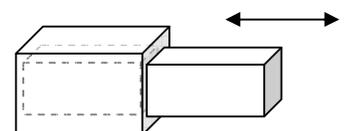
Giunto sferico.

Il giunto sferico toglie ai corpi che collega la possibilità di traslazioni relative, lasciando i tre gradi di libertà di rotazione. Si pensi all'esempio classico dell'articolazione testa del femore-acetabolo, che realizza la possibilità per il femore di ruotare intorno al centro cinematico dell'articolazione.



Giunto prismatico.

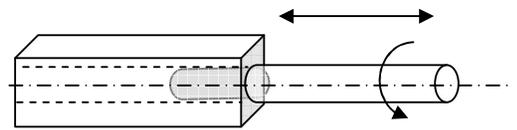
Se i due corpi collegati dal giunto non possono compiere rotazioni relative intorno all'asse dell'accoppiamento, il giunto cancella cinque gradi di libertà, tre rotazioni e due traslazioni, permettendo soltanto una traslazione nel moto relativo. Il numero di gradi di libertà conservato dal sistema dei due corpi collegati dal giunto, è pari a sette



dei dodici originari.

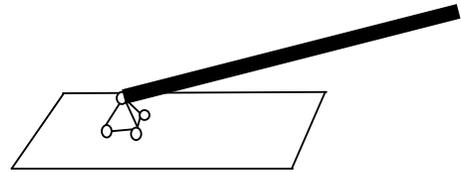
Giunto cilindrico.

Il giunto cilindrico conserva nel moto relativo soltanto due gradi di libertà, una rotazione intorno all'asse del cilindro e uno spostamento secondo l'asse, cancellando quindi 4 gradi di libertà. Il sistema complessivo dei due corpi mantiene quindi 8 gradi di libertà.



Appoggio piano

E' frequente il caso che un corpo sia vincolato con un suo punto a scorrere su un piano. In questo caso nel moto relativo i due corpi conservano cinque gradi di libertà, due spostamenti e tre rotazioni. Il complesso dei due corpi collegati ha quindi 11 gradi di libertà.



Incastro spaziale

Blocca completamente il movimento relativo dei due corpi che collega. Il sistema dei due corpi mantiene 6 gradi di libertà complessivi.

Numero di gradi di libertà di un sistema in moto piano:

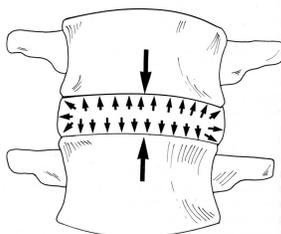
$$z = 3 \cdot n - 3 \cdot i - 2 \cdot c - a$$

- Nella relazione precedente si ha:
- n = numero dei corpi che compongono il sistema
- i = numero degli incastri
- c = numero delle cerniere (giunti rotoidali)
- a = numero degli appoggi semplici

Numero dei gradi di libertà di un sistema spaziale:

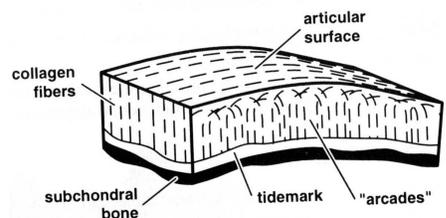
$$z = 6 \cdot n - 6 \cdot i - 3 \cdot c - 1 \cdot a_p$$

Con significato analogo dei simboli, tenendo presente che in questo caso vanno considerati i giunti spaziali e non quelli piani.



Un esempio importante di sistemi articolati spaziali è quello delle articolazioni degli arti superiori e inferiori del corpo umano e del rachide spinale. Si tratta in genere di giunti rotoidali (l'articolazione dell'anca è, come abbiamo accennato un vincolo sferico, poiché la testa del femore, di forma sferica, si accoppia alla cavità

dell'acetabolo, anch'essa della stessa forma. Ambedue gli elementi sferici sono rivestiti da un materiale elastico e relativamente deformabile, la cartilagine, che ha lo scopo di attenuare le punte di sollecitazione dovute al trasferimento dei carichi dall'arto al tronco, attraverso il bacino. Se le superfici della testa del femore e dell'acetabolo a contatto strisciassero l'una sull'altra senza alcun lubrificante, si avrebbe una rapida usura delle superfici stesse, con conseguente danno funzionale nell'articolazione. In effetti, le



superfici sono lubrificate dal liquido sinoviale che abbassa fortemente il coefficiente d'attrito tra gli elementi a contatto e minimizza il calore prodotto per attrito durante il funzionamento dell'articolazione. Studi recenti hanno dimostrato che lo strato di cartilagine che riveste la superficie ossea dura della testa del femore presenta una struttura fibrosa con fibre di collagene disposte radialmente a partire dall'osso per assumere un andamento tangenziale alla superficie esterna. Questa struttura permette all'articolazione di sopportare elevati carichi dinamici.

Analisi di un sistema articolato.

Sia completamente definita la geometria del sistema, in questo caso un quadrilatero articolato con un solo grado di libertà. Siano date la velocità angolare e l'accelerazione angolare della prima asta OA. Partendo dal punto fisso O e analizzando la prima asta si ha:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{OA}$$

$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{OA} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{OA})$$

Il calcolo analitico delle componenti della velocità e dell'accelerazione di A è elementare, ricordando che i vettori velocità angolare e accelerazione angolare sono diretti come l'asse z ed hanno quindi una sola componente, e che le componenti del vettore OA sono ricavabili dalla geometria nota del

meccanismo. E' interessante una procedura di calcolo grafico della velocità e dell'accelerazione più rapida e diretta, usando le seguenti proprietà.

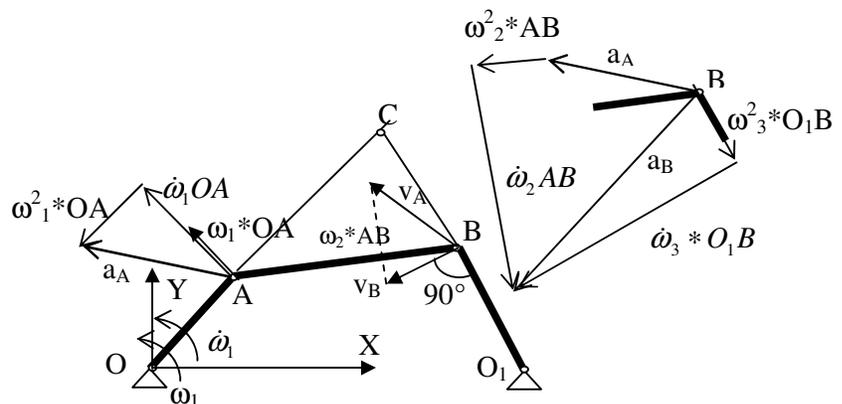
- La velocità di A è un vettore normale ad OA, di valore $\omega_1 * OA$. Nel caso si vogliano usare costruzioni grafiche, è necessario riportare i vettori sul disegno in scala opportuna. Possono in ogni caso impiegarsi scale diverse per le lunghezze, per le velocità e per le accelerazioni.
- L'accelerazione di A è la somma di due vettori il primo di modulo $\dot{\omega}_1 * OA$, perpendicolare ad OA, con verso derivato dalla regola delle tre dita della mano destra (pollice secondo $\dot{\omega}_1$, indice secondo OA, medio secondo la componente cercata dell'accelerazione), il secondo diretto come OA, da A verso O e modulo $\omega_1^2 * OA$. Le componenti di velocità ed accelerazione di A sono mostrate nella figura.

Per il punto B si applicheranno le relazioni già viste:

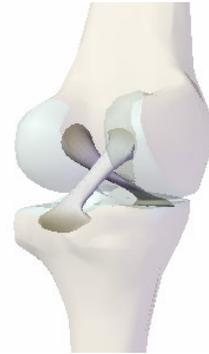
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{AB}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{AB}$$

I poligoni di velocità e accelerazione sono mostrati in figura. Quello d'accelerazione di B è stato traslato per chiarezza, conservando i rapporti e le grandezze dei vettori. Nella costruzione è anche rappresentato il centro d'istantanea rotazione della biella, la cui posizione è utile per la



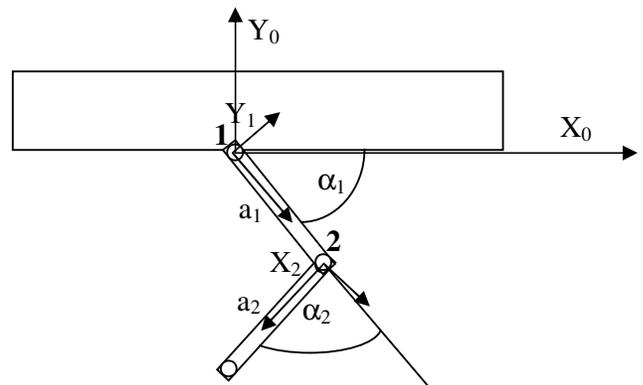
determinazione rapida della velocità angolare ω_2 . Infatti, il poligono delle velocità per B non può essere costruito, senza conoscere ω_2 . Utilizzando la proprietà secondo la quale il modulo della velocità di A è uguale al prodotto $\omega_2 \cdot CA$, si ottiene immediatamente ω_2 . Per la costruzione del poligono d'accelerazione di B è necessario conoscere ω_3 . Per questo è sufficiente considerare che la velocità v_B , precedentemente determinata, è in modulo uguale a $\omega_3 \cdot O_1B$. Si sommeranno quindi in serie i vettori a_A , $\omega_2^2 \cdot AB$ e quindi si tratterà una linea indefinita normale ad AB (linea d'azione di $\dot{\omega}_2 \times AB$). Per poter chiudere il poligono è necessario ripartire da B, tracciare il vettore $\omega_3^2 \cdot O_1B$ nel verso da B verso O_1 e tracciare una linea indefinita perpendicolare a questo, che rappresenta la linea d'azione della $\dot{\omega}_3 \cdot O_1B$. L'intersezione delle linee indefinite prima tracciate fornisce la punta del vettore a_B . La figura mostra i legamenti crociati anteriore e posteriore. Se consideriamo che la tibia costituisca il telaio e il condilo femorale la biella. L'insieme si comporta approssimativamente come un quadrilatero articolato. In cui i due bilancieri siano incrociati.



9.2 Applicazione a semplici sistemi articolati

I problemi e gli esempi che saranno trattati in questo paragrafo, riguardano la determinazione di posizione, velocità ed accelerazioni, indipendentemente dalle forze eccitrici. Ricordiamo che i sistemi che tratteremo sono costituiti da corpi rigidi o insiemi di corpi rigidi, articolati mediante vincoli, in genere vincoli rotoidali. Tratteremo sistemi piani, per i quali è possibile ipotizzare che le velocità ed accelerazioni giacciono in un piano, che chiameremo piano del moto. Condizione preliminare per l'analisi di un sistema articolato, è che si possieda la matrice di rotazione-posizione per qualunque sistema di riferimento mobile. Per chiarire il metodo d'analisi impiegato impiegheremo un sistema elementare articolato, composto di due soli elementi, rappresentato in figura:

Il sistema sia costituito da due aste articolate con giunti rotoidali. La scelta dei sistemi di riferimento mobili è arbitraria, sono possibili quindi molte scelte diverse, tuttavia una scelta conveniente, che porta ad una forma semplice e uniforme delle matrici di rotazione, è quella in figura, basata sulla seguente procedura:



- Si scelgano terne destre con l'asse z disposto secondo l'asse di rotazione dell'elemento.
- L'asse X sia disposto secondo l'asse dell'elemento, con il verso dal nodo di ordine minore a quello di ordine maggiore.
- L'asse Y formerà una terna destra con i primi due.

Indicheremo le lunghezze dei due elementi con a_1, a_2 rispettivamente, gli angoli di rotazione tra un sistema e quello precedente saranno gli angoli formati dai rispettivi assi X. Quindi α_1 sarà l'angolo formato da X_1 con X_0 , α_2 l'angolo tra X_2 e X_1 . Richiamando i risultati già ottenuti a proposito delle matrici di rotazione-spostamento, si ottiene facilmente che la posizione del punto 3 rispetto al sistema fisso è data da:

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} c\alpha_1 & -s\alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 & a_1 \\ s\alpha_2 & c\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha_{12} & -s\alpha_{12} & 0 & a_1c\alpha_1 \\ s\alpha_{12} & c\alpha_{12} & 0 & a_1s\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha_{12}a_2 + a_1c\alpha_1 \\ s\alpha_{12}a_2 + a_1s\alpha_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In cui si è posto $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$. Ricordando che \mathbf{P}_3 rappresenta il vettore posizione del punto 3 rispetto al sistema fisso e ricordando le regole di derivazione dei prodotti, la velocità del punto \mathbf{P}_3 rispetto al sistema fisso si ottiene derivando l'espressione:

$$\mathbf{P}_3^0 = \mathbf{T}_2^0 \mathbf{P}_3^2 = \begin{bmatrix} c\alpha_{12} & -s\alpha_{12} & 0 & a_1c\alpha_1 \\ s\alpha_{12} & c\alpha_{12} & 0 & a_1s\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha_{12}a_2 + a_1c\alpha_1 \\ s\alpha_{12}a_2 + a_1s\alpha_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Non è più necessario nella trattazione delle velocità ricorrere alle usuali matrici 4x4, essendo sufficienti per le relazioni tra velocità, matrici di ordine 3. Si ottiene quindi:

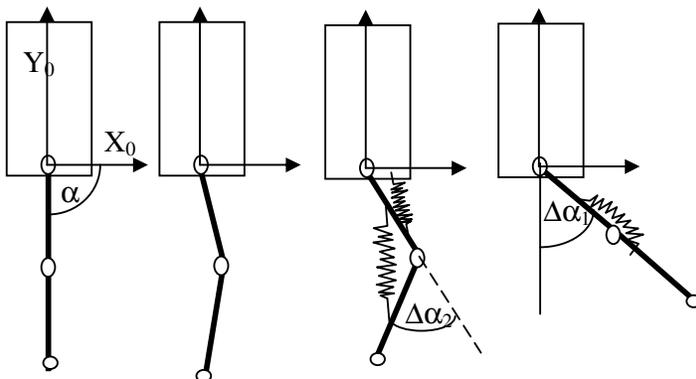
$$\mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} -a_1s\alpha_1\dot{\alpha}_1 - a_2s\alpha_{12}(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \\ a_1c\alpha_1\dot{\alpha}_1 + a_2c\alpha_{12}(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s\alpha_1 - a_2s\alpha_{12} & -a_2s\alpha_{12} & 0 \\ a_1c\alpha_1 + a_2c\alpha_{12} & a_2c\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'importante risultato espresso dall'ultima relazione mostra che la velocità può essere espressa come prodotto di una matrice dipendente dagli angoli α , quindi dalla configurazione del sistema, e da un vettore di derivate degli stessi angoli. La matrice prende il nome di **Jacobiano**. Lo Jacobiano varia, ovviamente, con la configurazione. La sua utilità è nel fatto che, assumendo una legge temporale di variazione degli angoli α , in corrispondenza di una certa configurazione, si ottiene per semplice moltiplicazione la corrispondente velocità \mathbf{v}_3 , in corrispondenza del punto 3. Si assuma ad esempio, in conformità ad un'osservazione sperimentale del moto di deambulazione lenta, una legge di variazione degli angoli data dalle relazioni:

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \Delta\alpha_1 \sin(\omega t)$$

$$\alpha_2 = \Delta\alpha_2 \sin(2\omega t - \pi)$$

Le leggi assunte si riferiscono al moto di avanzamento della gamba nella seguente successione (vedi figura):



1. Slancio iniziale del ginocchio e della coscia che ruota nel senso positivo delle rotazioni, in senso antiorario, partendo però da un angolo di partenza negativo.
2. La tibia ruota nel senso negativo delle rotazioni, rispetto al femore. Questo è dovuto al fatto che l'azione del muscolo flessore del ginocchio,

rappresentato in figura come una molla tratteggiata, fa ruotare i due elementi che collega in senso opposto.

3. Continua la rotazione del femore mentre il ginocchio viene esteso, generando una rotazione positiva della tibia.
4. Femore e tibia terminano il ciclo di movimento, allineati.

Quello analizzato è solo un quarto del ciclo completo di deambulazione. Per noi servirà semplicemente per analizzare la legge di variazione della velocità della caviglia, il punto indicato come nodo 3 nella trattazione precedente. Riprendendo quindi la legge di variazione degli angoli α e derivando si ha:

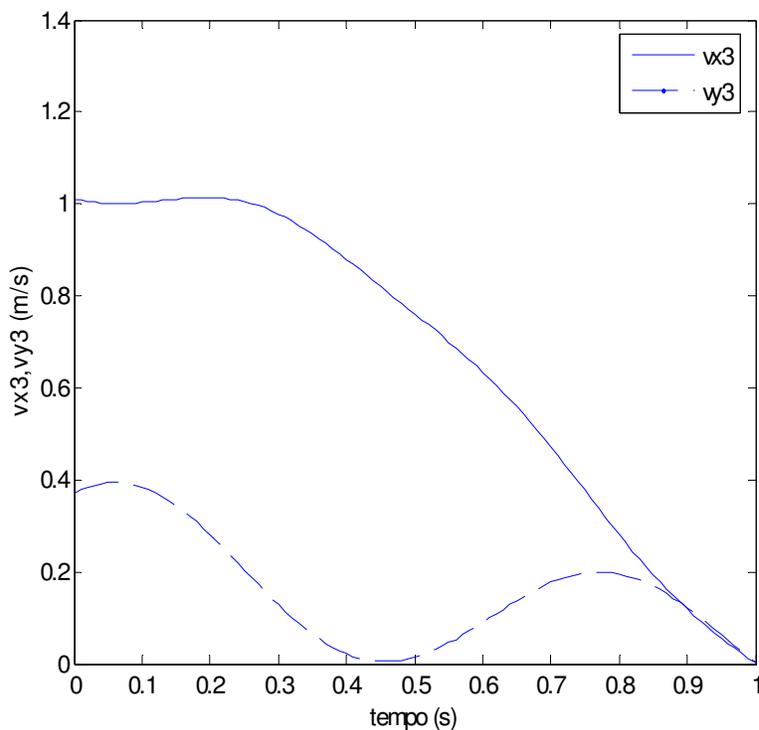
$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \omega \Delta \alpha_1 \cos(\omega t) \\ \dot{\alpha}_2 &= \omega \Delta \alpha_2 \cos(2\omega t - \pi)\end{aligned}$$

Utilizzando ancora lo Jacobiano, ricavato in precedenza, si ha:

$$\mathbf{v}_3^0 = \begin{bmatrix} -a_1 c \alpha_1 - a_2 s \alpha_{12} & -a_2 s \alpha_{12} & 0 \\ a_1 s \alpha_1 + a_2 c \alpha_{12} & a_2 c \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \Delta \alpha_1 \cos(\omega t) \\ \omega \Delta \alpha_2 \cos(2\omega t - \pi) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

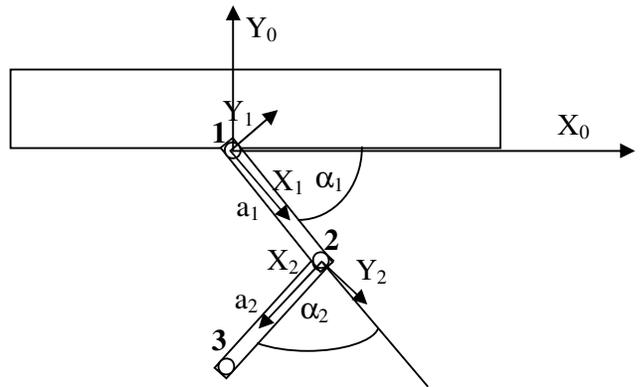
Per giungere ad una valutazione numerica della legge di velocità della caviglia si supponga che il movimento corrispondente alla parte di ciclo analizzata sia compiuto in un secondo. La pulsazione ω è quindi eguale a 6,28 rad/s. Si assumano inoltre i dati seguenti:

$$\alpha_{10} = -90^\circ \quad \alpha_{20} = 0 \quad \Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_2 = 30^\circ, \quad a_1 = a_2 = 0,45 \text{ m}$$



I valori di \mathbf{v}_3 in funzione del tempo sono stati calcolati usando l'ambiente Matlab. L'andamento della velocità della caviglia è riportato nella figura a fianco. v_{x3} rappresenta la componente orizzontale della velocità, v_{y3} la componente verticale. Quest'ultima inizia con valori discreti, a causa del movimento di trascinarsi della tibia da parte del femore, scende poi a zero per il moto retrogrado del secondo elemento, per riguadagnare valori positivi nell'ultima parte del ciclo. Si tenga presente che il tempo di 1 s, che rappresenta l'estensione delle ascisse, corrisponde ad un intero ciclo

d'oscillazione per la tibia, ad un quarto di ciclo per il femore. L'analisi cinematica qui svolta parte dalla conoscenza della legge d'oscillazione dei due elementi del sistema, a cui segue il calcolo dello Jacobiano, ed infine quello della velocità del punto 3. Un altro procedimento di calcolo per sistemi articolati piani è applicabile quando esiste almeno un punto in cui è noto il valore della velocità e dell'accelerazione, ad esempio un punto fisso. Mostriamo questo procedimento di calcolo applicato alla determinazione della velocità e dell'accelerazione in qualunque punto di un sistema articolato piano, quando sono date la configurazione del sistema e le velocità angolari nei suoi giunti. Si consideri allora lo stesso sistema articolato considerato in precedenza, e si applichi il teorema di Rivals, partendo dal primo elemento, nel quale è presente un punto fisso, e passando in seguito al secondo elemento, ottenendo:



Si consideri allora lo stesso sistema articolato considerato in precedenza, e si applichi il teorema di Rivals, partendo dal primo elemento, nel quale è presente un punto fisso, e passando in seguito al secondo elemento, ottenendo:

$$\mathbf{v}_1 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 \times \mathbf{P}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + (\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$$

Sostituendo i vettori espressi secondo le componenti, si ha:

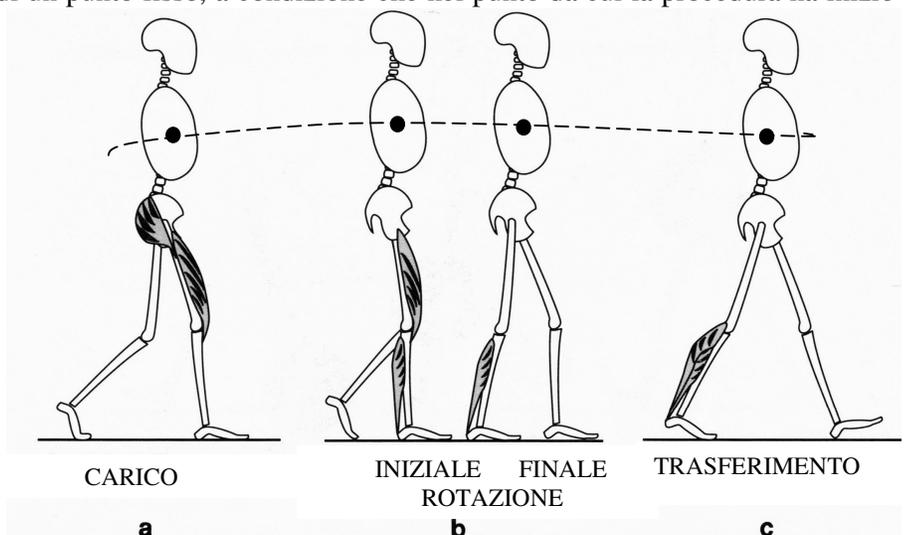
$$\begin{Bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 c \alpha_1 \\ a_1 s \alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_1 s \alpha_1 \dot{\alpha}_1 \\ a_1 c \alpha_1 \dot{\alpha}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_1 s \alpha_1 \dot{\alpha}_1 \\ a_1 c \alpha_1 \dot{\alpha}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_2 c (\alpha_1 + \alpha_2) \\ a_2 s (\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_1 s \alpha_1 \dot{\alpha}_1 - a_2 s (\alpha_1 + \alpha_2) (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \\ a_1 c \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + a_2 c (\alpha_1 + \alpha_2) (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

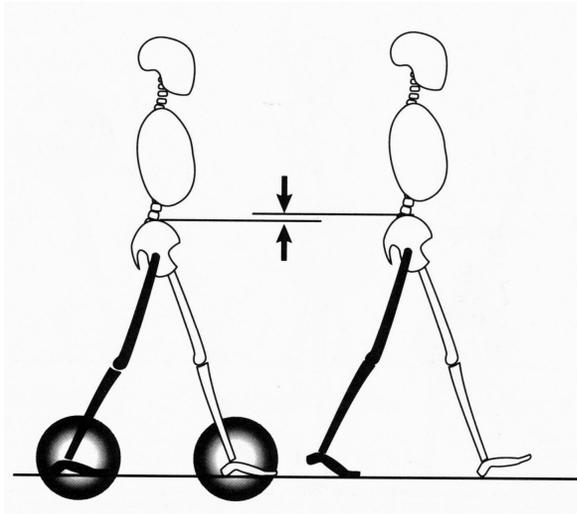
Un semplice esame permetterà di verificare che l'espressione della velocità del punto 3 sia identica a quella ottenuta per altra via. Si ricordi che $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$. La procedura illustrata è applicabile anche se non si è alla presenza di un punto fisso, a condizione che nel punto da cui la procedura ha inizio la velocità sia, in ogni caso, nota.

9.3 Analisi della deambulazione.

S'intende qui fornire, utilizzando gli strumenti d'analisi dati in precedenza, alcuni elementi fondamentali per l'analisi della deambulazione, utili per capire la natura



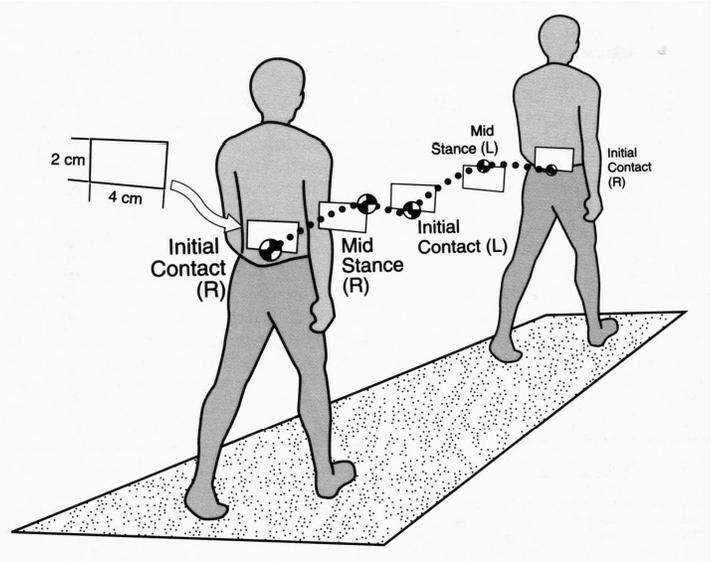
dei problemi connessi e gli strumenti più adatti per risolverli. Cominciamo da una figura che riproduce le fasi della deambulazione, riportata da Gait Analysis di Jacquelin Perry, Ed, Slack Inc.: La figura illustra le tre fasi fondamentali della deambulazione. La fase **a** inizia con il caricamento della gamba destra, ottenuto con lo spostamento del tronco in avanti e con la forza orizzontale propulsiva sul piede sinistro. La distensione del ginocchio è ottenuta attraverso l'azione del quadricipite femorale, mostrato nella figura. Nella fase intermedia **b** avviene una rotazione di tutto il corpo intorno alla gamba destra tesa, mentre la sinistra si inflette e il piede sinistro si stacca da terra. In questa fase il corpo è soggetto ad una caduta in avanti, simile a quella di un bastone, inizialmente tenuto in equilibrio verticale e lasciato poi ruotare intorno al suo punto di appoggio sul terreno. Nella figura è anche possibile osservare che il baricentro del corpo subisce un innalzamento nella fase intermedia, ed un abbassamento in quelle iniziale e finale. Questo abbassamento è contrastato nelle fasi a e c dal sollevamento del piede intorno al suo punto avanzato di rotazione. Un



calcolo dell'abbassamento del baricentro tra una posizione con gambe allargate a compasso e piedi completamente poggiati e la posizione diritta con gambe unite in posizione verticale porterebbe a valori dell'abbassamento intorno a 13,4 cm., se non intervenissero meccanismi correttivi, come quelli prodotti dalla rotazione della caviglia, che riducono a circa 2 cm l'abbassamento del baricentro. Questo dato permette di impostare un calcolo di massima dell'energia spesa nella deambulazione, ricordando che il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione. In questo caso la forza capace di produrre lavoro è soltanto la forza peso, oltre ai momenti che agiscono in corrispondenza dei giunti. Ricordando che,

anche se questi momenti sono presenti come coppie equilibrate sul giunto, essi compiono lavoro a

causa della rotazione del giunto stesso. Calcolare questo lavoro è un'impresa ardua, considerata la difficoltà di ottenere la rigidità dei muscoli che producono il movimento delle varie sezioni della gamba, pertanto ci limiteremo a considerare il lavoro perduto per il ciclo di innalzamento-abbassamento del baricentro che avviene ad ogni passo. Occorre ricordare che oltre che nel piano verticale il baricentro si sposta nel piano orizzontale in quanto passando dal sostegno sulle due gambe a quello su una



gamba sola, quando una gamba viene lanciata in avanti, il corpo si sposta lateralmente in modo tale da portare il baricentro sulla verticale del piede di appoggio. Tornando al valore di 2 cm dell'abbassamento del baricentro, si ha che il lavoro compiuto da un corpo di massa pari a 75 kg è

per ogni passo eguale a $75 \cdot 9,81 \cdot 0,02 = 14,7 \text{ J}$. Assumendo che in un'ora, con andatura di passeggio, si compiono 5000 passi di ampiezza 0,75 m, ne consegue che il lavoro speso in un ora per il ciclo del baricentro è pari a $14,7 \cdot 5000 = 35000 \text{ Ws} = 9,722 \text{ Wh}$. Si tratta di un'energia molto ridotta, corrispondente ad una potenza continuativa di 10 W. Per tener conto nella potenza assorbita anche del sollevamento del baricentro della gamba, possiamo impostare un semplice calcolo per ottenere il sollevamento del baricentro delle varie sezioni della gamba, ad ogni passo. Utilizzando i dati forniti nel capitolo sulle forze (tabella sulle dimensioni degli arti superiori e inferiori), otteniamo i seguenti dati di partenza:

$h_1 = 0,755 \text{ m}$ $h_2 = 33,1 \text{ m}$ $h_3 = 0,05 \text{ m}$. Assumiamo inoltre $\vartheta_1 = 45^\circ$, $\vartheta_2 = 90^\circ$. Per il peso delle varie sezioni assumiamo, sempre con riferimento ai dati precedenti, coscia 65 N, gamba 30 N, piede 10 N. Il lavoro compiuto per il sollevamento dei baricentri delle varie sezioni è quindi:

$$\Delta h_3 = l_{G3}(1 - \cos \vartheta_1)$$

$$\Delta h_2 = l_3(1 - \cos \vartheta_1) + l_{G2}(1 - \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1))$$

$$\Delta h_1 = l_3(1 - \cos \vartheta_1) + l_{12}(1 - \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1))$$

I semplici calcoli numerici portano a:

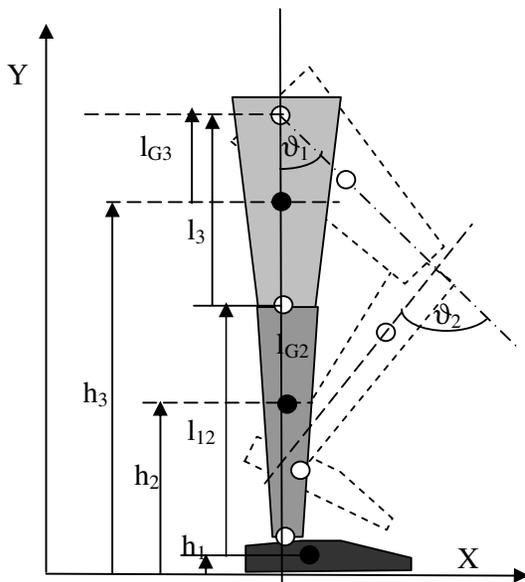
$$\Delta h_3 = 0,06 \text{ m}$$

$$\Delta h_2 = 0,107 \text{ m}$$

$$\Delta h_1 = 0,20 \text{ m}$$

$$\Delta L = -\Delta U = -(m_3 g \cdot \Delta h_3 + m_2 g \Delta h_2 + m_1 g \Delta h_1) = -(65 \cdot 0,06 + 30 \cdot 0,107 + 10 \cdot 0,2) = -9,11 \text{ J}$$

Poichè si ha un sollevamento ad ogni passo, il lavoro speso per 5000 passi compiuti in un ora risulta $L = 5000 \cdot 9,11 / 3600 = 12,65 \text{ Wh}$. Sommando questo lavoro a quello, già calcolato per il sollevamento del baricentro dell'intero corpo si ottiene $L_{12} = L_1 + L_2 = 12,65 + 9,11 = 21,76 \text{ Wh}$. Nel calcolo precedente abbiamo supposto che, come è legittimo considerare, il lavoro di sollevamento del baricentro del corpo e delle gambe non venga in alcun modo recuperato. Pur dovendo considerare del tutto qualitativo il calcolo fatto, salta agli occhi la ridotta entità del lavoro meccanico compiuto durante la deambulazione. Tuttavia occorre considerare che il lavoro meccanico calcolato non tiene conto dell'energia perduta per attrito nella rotazione dei giunti (ginocchio, caviglia, spalla, gomito), energia il cui calcolo, anche di prima approssimazione, si presenta assai arduo. Inoltre è importante



considerare che il rendimento energetico complessivo del sistema di locomozione dell'uomo è assai basso, l'azione muscolare è da considerarsi un processo a basso rendimento. Studi compiuti a questo riguardo hanno mostrato che il rendimento complessivo, cioè il rapporto tra lavoro meccanico svolto ed energia consumata nei processi metabolici connessi al lavoro muscolare, ha valori intorno al 20-30 %.

La valutazione dell'energia spesa per la deambulazione ha formato oggetto di molta attenzione nella biomeccanica. L'approccio seguito in genere è stato quello di misurare la quantità di CO2 prodotta durante l'attività a regime, in eccesso rispetto a quella prodotta a riposo. Dalla quantità di CO2 espirata si passa poi al consumo d'ossigeno, che può essere

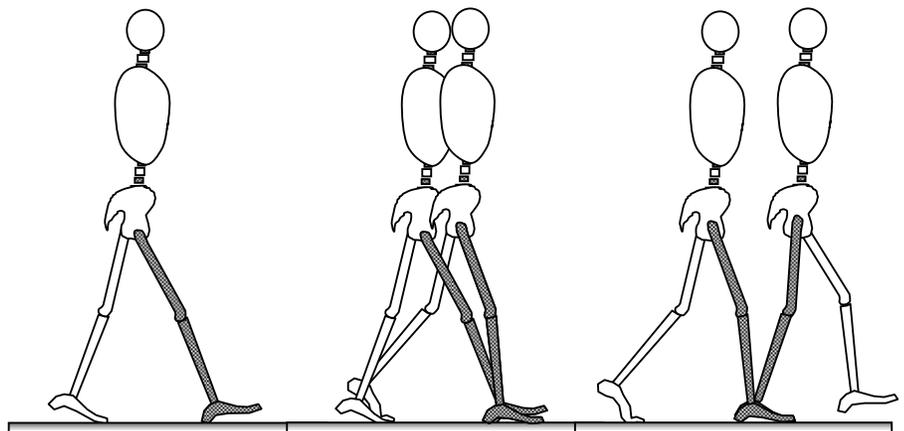
messo in relazione con l'energia metabolica consumata. In termini approssimati si può ritenere che, quando una tipica dieta composta di grassi, carboidrati e proteine sia bruciata in un litro di ossigeno, si sviluppino 4,82 Kcal. Studi sperimentali, condotti con la spirometria su diversi tipi di marcia e su soggetti diversi, hanno verificato che un adulto in marcia lenta consuma 15 ml d'ossigeno per kg di peso corporeo al minuto. Ritornando al nostro marciatore, di massa pari a 75 kg, che ha marciato per un ora, otteniamo che il suo consumo di ossigeno sarebbe pari a :

$$\text{Vol O}_2 = 0,015 \cdot 75 \cdot 60 = 67,5 \text{ dm}^3 \quad \text{corrispondente a } 4,82 \cdot 67,5 = 325,35 \text{ Kcal} = 325/860 = 0,38 \text{ kWh} = 380 \text{ Wh.}$$

Il valore dell'energia metabolica richiesta per la marcia è quindi assai più alto del lavoro meccanico compiuto, pur prendendo in considerazione tutti i movimenti che hanno luogo negli organi del nostro corpo, movimenti delle braccia, tronco etc. Da quanto precede si può concludere che un modello puramente "macchinistico" dell'attività muscolare non permette di prevedere con buona approssimazione l'energia consumata. Si tenga presente ad esempio che se si solleva un peso con un braccio e lo si tiene immobile, non si compie alcun lavoro meccanico, mentre i muscoli deputati al sollevamento richiedono energia metabolica per restare in contrazione. L'esempio ed i dati riportati mostrano che non esiste ancora un modello affidabile che descriva accuratamente, in termini di forze e spesa energetica, il modo di funzionare dei muscoli.

Il ciclo del cammino

Il ciclo del passo è definito come la successione di movimenti che parte dall'appoggio del tallone di un piede al successivo appoggio sullo stesso piede. Il ciclo si divide nelle due fasi di appoggio e trasferimento.



Descriveremo il ciclo

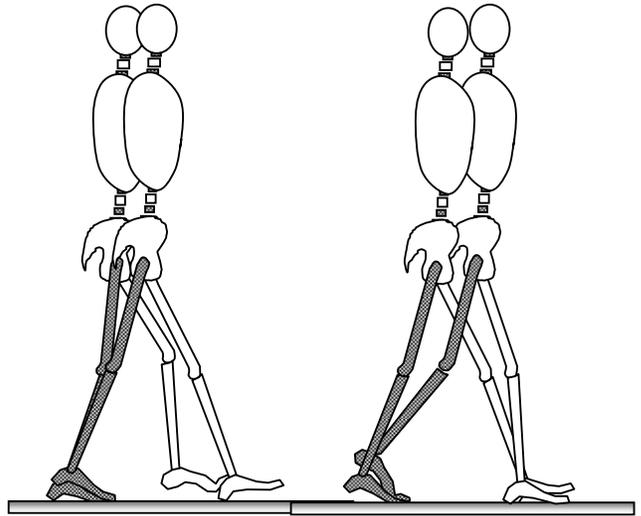
del passo con riferimento ad una sola gamba, inizialmente appoggiata e successivamente trasferita in avanti. La fase di appoggio corrisponde al contatto della gamba di riferimento col terreno, quella di trasferimento, allo spostamento della gamba in avanti sino al momento del contatto successivo. La fase di appoggio ha una durata pari a circa il 60 % dell'intero ciclo, quella di trasferimento del 40%. Descriveremo ciascuna sezione elementare di queste fasi in modo analitico. La durata della fase di appoggio si riduce al 40 % nella corsa, in cui compare una terza fase, quella di volo, nella quale nessuno dei piedi è a contatto col terreno.

Appoggio-1. Doppio contatto

Il ciclo inizia con un periodo di appoggio doppio, di durata pari al 10 % dell'intero ciclo, durante il quale ambedue i piedi sono a contatto col terreno. Questo movimento corrisponde alle prime due immagini della figura superiore. Il tallone del piede di riferimento, in grigio, tocca il suolo mentre l'altro piede è ancora a contatto. Si tratta di una vera e propria collisione in quanto il piede è dotato di una componente di velocità diretta verso il basso. Ad ammortizzare gli effetti dell'urto concorre il meccanismo di movimento del piede. La fase termina quando il resto del piede viene a contatto col terreno. Durante questa fase il piede subisce una pronazione nell'articolazione subtalare, necessaria per portare il contatto sulla parte mediale dell'avampiede. In questa fase il piede funziona come un ammortizzatore. La tibia ruota internamente seguendo il movimento del piede.

Appoggio-2. Carico e rotazione

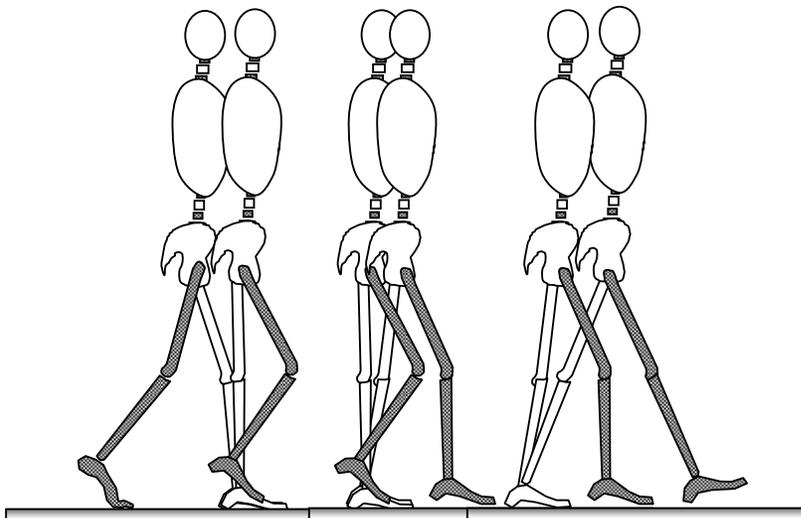
La reazione del terreno sul piede di riferimento aumenta rapidamente, sia a causa di effetti dinamici che per il trasferimento di carico sul piede anteriore, quello posteriore sta infatti per terminare la sua fase di contatto. Quando il piede posteriore si stacca, il piede di cui seguiamo l'evoluzione (nel nostro caso il destro) sopporta tutto il peso del corpo ed i sovraccarichi dinamici. La reazione del terreno è inclinata nel senso antero-posteriore. Grazie allo spostamento in avanti del tronco la reazione vincolare acquista un momento rispetto al baricentro che fa ruotare il corpo in senso orario, con un movimento, appena accennato, di caduta in avanti. La gamba di riferimento ruota intorno all'articolazione della caviglia. Il piede si prepara ad assumere la funzione di leva per dare inizio alla fase di propulsione.



Appoggio-3. Propulsione.

Il piede di riferimento compie una flessione palmare sotto l'azione del gastrocnemio. Il tronco ruota in senso orario e si sposta in avanti. Per limitare il sollevamento del baricentro durante la rotazione del piede il ginocchio si inflette. La forza generata è diretta in senso postero-anteriore. Perché questa fase sia svolta correttamente l'articolazione subtalare deve essere supinata. Se esistesse una pronazione anormale dell'articolazione subtalare, questa andrebbe a prolungare la fase di propulsione e contatto e il trasferimento del carico sull'avampiede non sarebbe normale.

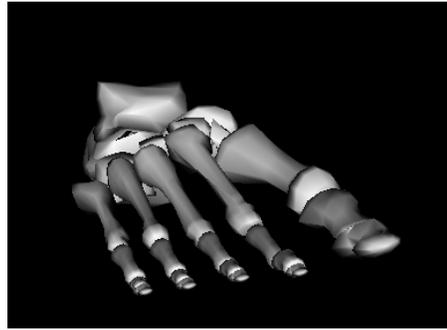
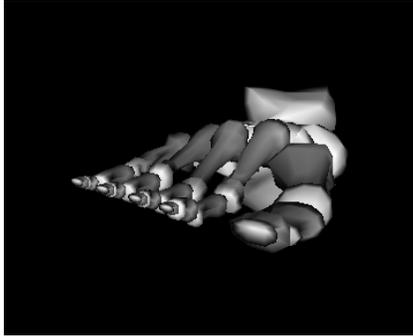
Trasferimento-4.



La fase di trasferimento inizia subito dopo il sollevamento del piede. Il ginocchio si flette ed il piede effettua una flessione dorsale. L'articolazione dell'anca viene inflessa per portare la gamba in avanti mentre il piede si muove parallelamente al terreno.

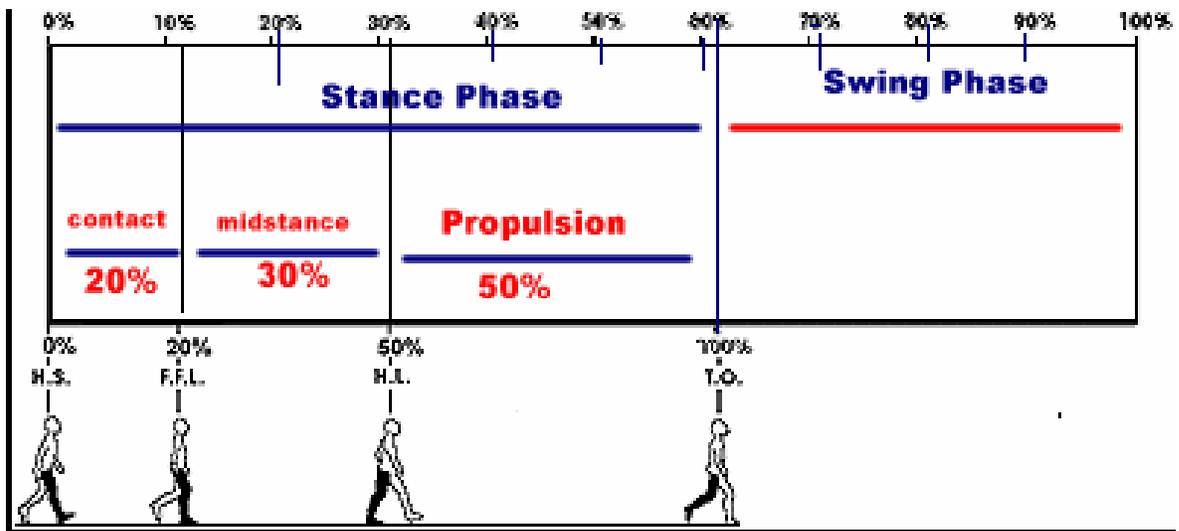
Trasferimento-5

L'ultima parte della fase di trasferimento corrisponde ad una distensione del ginocchio. Il piede si posiziona per il contatto sul tallone. I muscoli della gamba, in particolare il gastrocnemio e il quadricipite si attivano per assorbire le azioni dinamiche dovute al contatto del tallone col terreno. Dopo di questo inizia un nuovo ciclo. Nel cammino normale il piede entra in contatto col tallone. Di solito il contatto avviene nella zona postero-laterale con conseguente usura della zona interessata. Il parametro che determina in modo determinante l'area di contatto nel tallone è la posizione del piano trasverso del piede al momento del contatto. L'usura della zona mediale indica la presenza di probabili anomalie nella



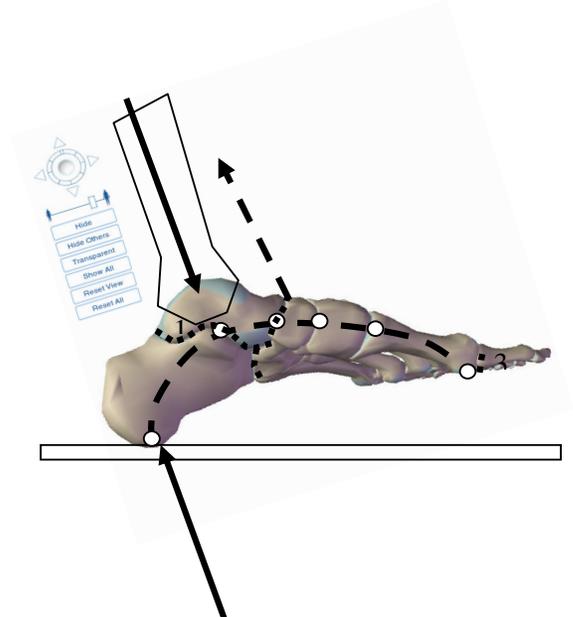
rotazione del segmento superiore. Nel cammino a velocità elevata può mancare il contatto col tallone. In questo caso il primo contatto può avvenire a metà piede e successivamente una rotazione del piede porta il contatto col tallone. In altri casi il

contatto col tallone può mancare del tutto. Questo accade per esempio nello scatto. L'immagine mostra le varie fasi del ciclo del cammino.



Movimenti elementari e funzioni del piede.

Dal punto di vista funzionale il piede ha tre importanti compiti: assorbimento dei carichi dinamici, controllo del sostegno e della stabilità del corpo, e propulsione. Ci limiteremo a pochi cenni sull'azione complessa svolta dal piede durante il cammino, lasciando a testi specialistici un'analisi profonda dell'argomento. Le articolazioni principali che influiscono sulla biomeccanica del cammino sono quella tibio-tarsica, quella sub-talare e quella metatarso-falangea, indicate nella figura con 1,2,3 con i profili delle superfici articolari.



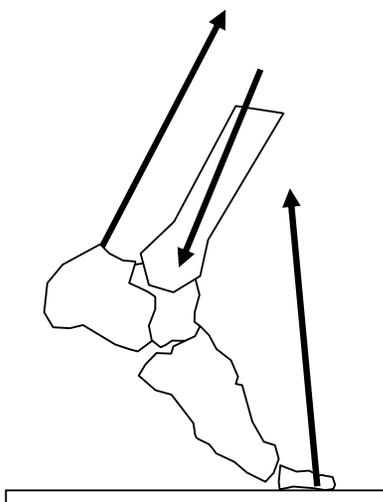
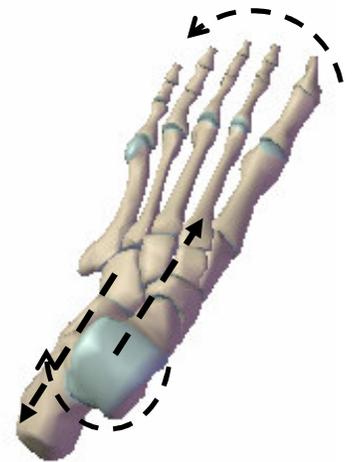
Assorbimento dei carichi dinamici.

I principali meccanismi di assorbimento sono collegati alla struttura a volta del sottopiede, schematicamente rappresentata nella figura. La volta si comporta come una struttura ad arco e,



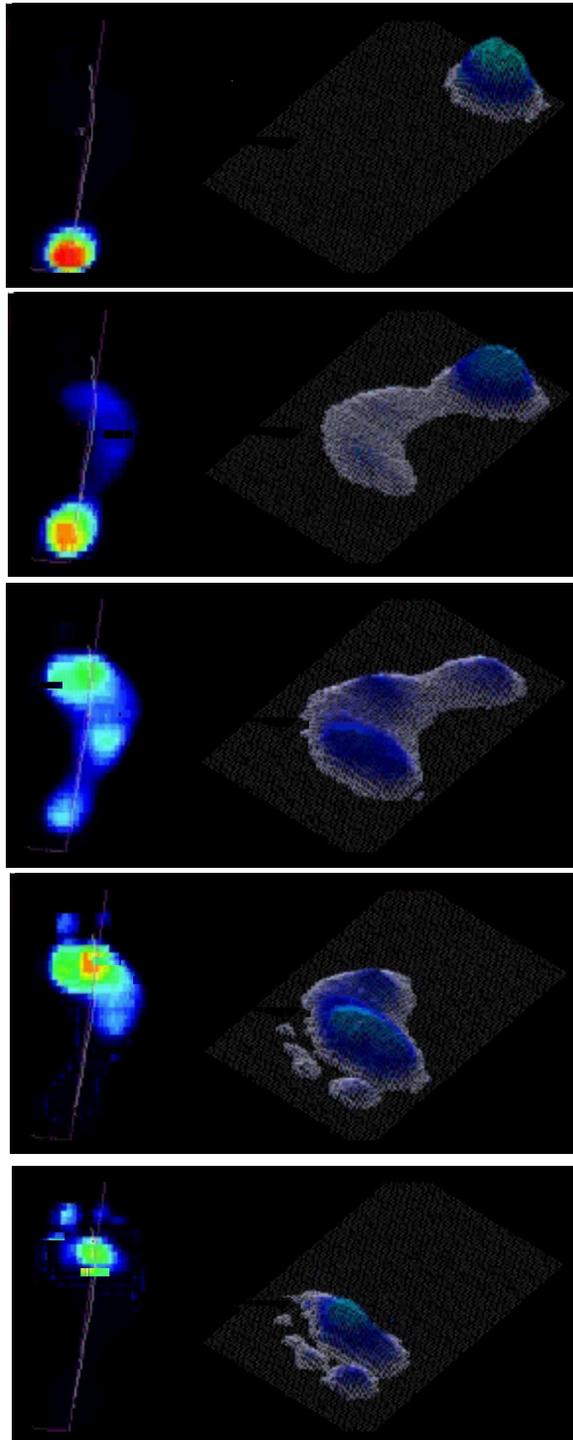
deformandosi quando il carico viene applicato, fornisce un meccanismo di assorbimento dei carichi dinamici molto efficace. Si pensi soprattutto alla corsa, in cui questi carichi sono di rilevante entità, pari anche a 4-5 volte il peso corporeo. Nella figura sono mostrati i carichi agenti nella fase di primo contatto del piede col terreno: la tibia applica all'astragalo un carico rivolto in avanti e verso il basso, mentre il carico applicato dal suolo al tallone è corrispondentemente rivolto verso l'alto, in senso anteroposteriore. Il momento di rotazione oraria che si genera tende a produrre una flessione plantare del piede che tende ad appoggiarsi completamente sul terreno. Questo movimento è controllato dalla tensione del muscolo tibiale anteriore (forza trattenuta). Nel piede piatto questo meccanismo è menomato o viene meno completamente. La pronazione porta anche il piede ad una condizione di irrigidimento, necessaria per

la successiva fase di propulsione. Se osserviamo il piede (nel caso presente si tratta del piede sinistro) dal lato posteriore vediamo che la linea d'azione della forza trasmessa all'articolazione dalla tibia e quella della forza di contatto sul tallone, sono diverse. Nasce quindi una coppia il cui momento è orario. Tuttavia la forcina costituita dalle estremità della tibia e del perone permette all'astragalo un solo grado di libertà di rotazione, impedendo quella nel piano del disegno. Entra allora in gioco l'articolazione subtalare con uno scorrimento relativo indicato dalle frecce, che permette la pronazione ed eversione dell'avampiede con conseguente rotazione interna della tibia. Per capire come il piede tenda nella fase di primo appoggio a compiere un movimento di pronazione-eversione è utile osservare il piede dall'alto con le componenti di forza relative nel piano di appoggio. I momenti che tendono a portare l'avampiede in pronazione ed eversione (la punta del piede ruota lateralmente) e l'astragalo, solidale alla tibia e al perone, in rotazione interna, sono indicati nella figura.



Nella fase di carico il piede poggia sul terreno nella zona

plantare e su un'ampia zona del calcagno. Nel piede normale queste due zone sono raccordate da una zona di collegamento lungo la fascia laterale. Questa zona manca nel piede molto arcuato, lasciando le due zone calcaneare e plantare separate. Nel piede piatto l'area di contatto si estende a tutta la pianta del piede a causa del cedimento dell'arco plantare. Si deve osservare che comunque il piede si appiattisce sotto carico a causa della flessione dell'articolazione medio tarsica. Si tratta di una deformazione modesta in quanto i carichi sono ben sopportati da una struttura ad arco. Nella fase di propulsione, a causa della potente azione del soleo e del gastrocnemio il calcagno si solleva e provoca la flessione dell'articolazione

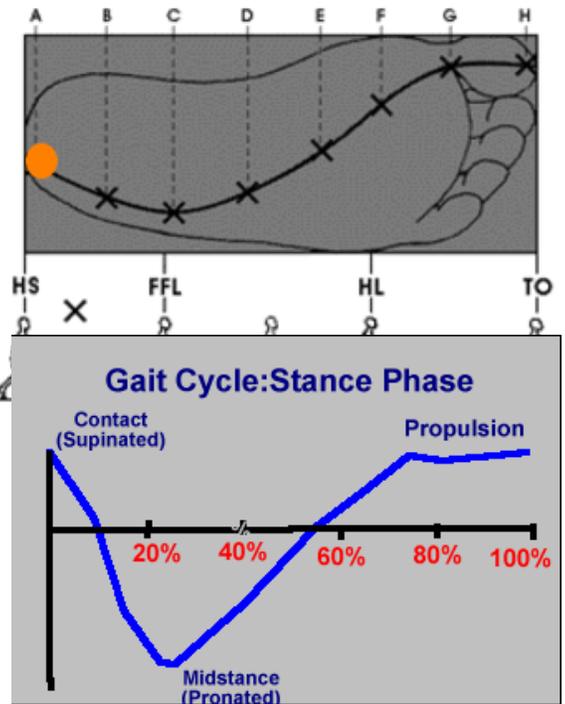


un'informazione di rilievo (asse Z). In questa sede si può soltanto accennare al fatto che le diverse patologie del piede e della caviglia portano a pattern barpodometrici alterati e facilmente riconoscibili. Lasciamo a testi e trattati specialistici la trattazione dell'argomento. Osserviamo

metatarso-falangea. Nella figura sono rappresentati in modo molto semplificato le tre forze principali agenti in questa fase. La prima è dovuta ai muscoli soleo e gastrocnemio ed ha la funzione di sollevare il retro piede dal terreno lasciando il contatto soltanto in corrispondenza delle falangi e dell'articolazione metatarso-falangea, la seconda è la reazione del terreno diretta verso l'alto ed inclinata in senso anteroposteriore, la terza è diretta secondo l'asse della tibia e si scarica sull'astragalo. In questa visione semplificata delle principali forze agenti le tre forze per farsi equilibrio devono passare per uno stesso punto. Attraverso il poligono delle forze semplici relazioni di equilibrio, se una di esse è conosciuta possono essere determinate le altre due. Supponendo ad esempio che la forza scaricata dalla tibia sull'articolazione tibio-tarsica sia approssimativamente pari al peso del corpo della persona, la forza muscolare e quella di contatto possono essere facilmente calcolate. In genere però nella biomeccanica sperimentale quello che si misura mediante pedane barpodometriche sono le pressioni di contatto tra pianta del piede e terreno. E' facile ricavare da queste misure il valore della risultante delle forze di reazione e i corrispondenti valori delle altre due forze. Le figure che seguono riportano l'andamento delle pressioni di contatto durante il cammino, per una persona non affetta da patologie. Le immagini sono state ottenute con un tappeto barpodometrico dotato di una rete di sensori piezoresistivi. I valori delle pressioni rilevate durante lo svolgimento del passo mostrano come dal primo contatto sul tallone con elevati valori delle pressioni si passi ad una ripartizione del carico sulla pianta ed infine sull'articolazione metatarso-falangea prima del sollevamento del piede. Nelle figure a sinistra le pressioni sono rappresentate mediante una mappa di colori, nelle figure a sinistra alla mappa di colori viene anche aggiunta

comunque che nel caso rappresentato mancano le informazioni relative alle azioni tangenziali scambiate per attrito tra piede e terreno. L'integrazione delle informazioni ottenute mediante queste misure porta alla determinazione delle componenti verticali delle azioni risultanti. Esistono comunque piattaforme di forza atte anche alla misura delle azioni tangenziali. La figura seguente mostra. L'esame baropodometrico è associato in genere alla ripresa televisiva del piede e della gamba durante la camminata per valutare la postura e il corretto movimento dei vari segmenti.

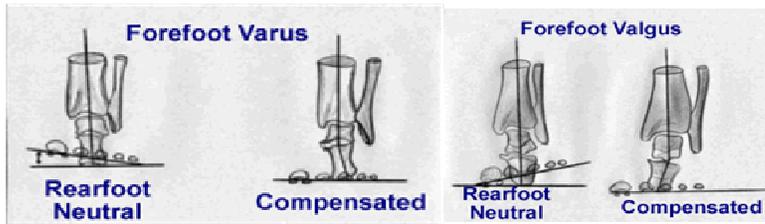
La figura precedente mostra come il contatto parta da una zona laterale del calcagno per proseguire lungo l'istmo che separa il calcagno dalla pianta e terminare sull'articolazione metatarso-falangea e quindi sull'alluce che rappresenta l'ultima zona di contatto prima del distacco. Si è già accennato al movimento complesso del piede durante questa fase, costituito essenzialmente da un movimento di pronazione-eversione che porta il contatto dalla fascia laterale a quella mediale. In prossimità dell'ultima fase del contatto ha inizio un movimento di supinazione che porterà il piede nella posizione supinata nella quale resterà sino al contatto successivo. Quanto detto è illustrato dal diagramma superiore dove l'angolo di pronazione-supinazione viene riportato in ordinate, mentre in ascisse compare la percentuale di completamento del ciclo del



| | % | EVENTS | LOWER LIMB | KNEE JOINT | ANKLE JOINT | SUBTALAR JOINT | MIDTARSAL JOINT |
|--------|--------|-----------------------|------------------|------------|-----------------|----------------|-----------------|
| | | | | | | | |
| STANCE | | I.C. → foot flat → | medial rotation | flexion | plantar flexion | pronation | free motion |
| | 20 | midstance | lateral rotation | extension | dorsi-flexion | supination | restricted |
| | 40 | heel rise → | | flexion | | | |
| | 60 | toe-off → | medial rotation | extension | dorsi-flexion | | |
| 100 | I.C. → | | | | | | |

cammino. La tabella seguente illustra i movimenti elementari del piede e delle varie articolazioni durante il cammino. La tabella è riferita alle varie fasi illustrate nella figura precedente. Come si è detto, in questo testo non si intende apporofondire il problema delle anomalie patologiche della postura e del movimento. Questo compito appartiene al dominio della biomeccanica e dell'ortopedia. Esso richiede un'accurata analisi di tutte le fasi del movimento,

misure degli angoli posturali e della mobilità dei giunti e una completa anamnesi. A titolo di pura esemplificazione nelle figure a lato vengono mostrate due tipiche anomalie dell'avampiede,



rispettivamente l'avampiede varo e valgo, costituite nel primo caso da un'inversione-supinazione, cioè una rotazione verso l'interno dell'avampiede rispetto all'asse del calcagno in posizione neutra, cioè verticale, nel secondo caso

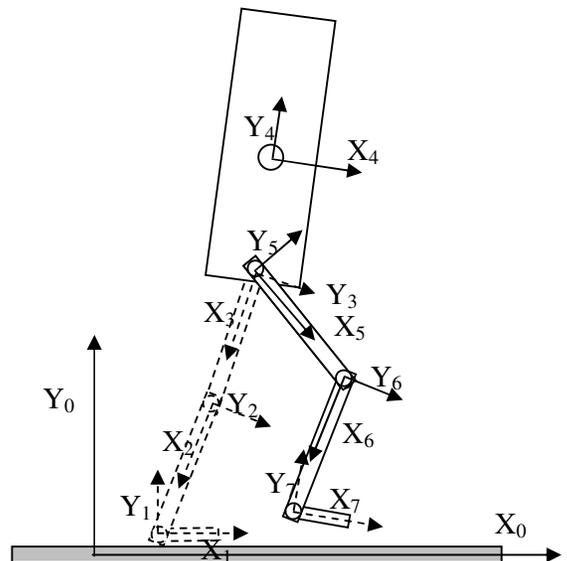
un'eversione-pronazione, cioè una rotazione verso l'esterno. Ambedue queste anomalie posturali, se di entità modesta possono essere compensate attraverso una rotazione del giunto sottoastralgico (subtalare).

Modello a segmenti del corpo umano

Lo studio biomeccanico del movimento degli arti inferiori e superiori trae beneficio dall'assimilare gli arti ad un sistema di corpi rigidi, articolati per mezzo di giunti rotoidali. La modellazione dell'arto richiede una serie d'ipotesi semplificative che rendono il problema facilmente trattabile, pur con risultati di notevole rilevanza applicativa. Alcune di queste ipotesi sono:

- Corpi indeformabili
- Giunti corrispondenti ai modelli ideali presentati.

In molti casi una semplificazione ancora più spinta si ha considerando il moto dell'arto come un moto piano, cioè trascurando i gradi di libertà corrispondenti all'esistenza di giunti sferici, piuttosto che rotoidali piani. In conformità a queste ipotesi di prima approssimazione, si può impostare un'analisi cinematica dell'arto, seguendo i principi esposti in precedenza.



Nel modello in figura si è costruito un sistema articolato che rappresenta il tronco come un unico elemento rigido e i due arti inferiori come sistemi articolati con tre segmenti, il femore, la tibia, il piede. Il problema è quello di calcolare la posizione di un qualunque elemento (ad esempio la posizione del baricentro del tronco oppure quella della caviglia avanzata, in funzione degli angoli assunti dai vari segmenti). E' pratica usuale, normalmente vantaggiosa, quella di riferirsi agli angoli che un generico segmento forma con il segmento contiguo (ad esempio l'angolo di piegamento del ginocchio o quello formato dagli assi X del tronco e del femore). E' anche opportuno tenere conto dei limiti fisiologici alla rotazione degli arti, ad esempio l'angolo di piegamento del ginocchio si può ritenere esteso al campo da 0 a - 160 gradi. Tutte le terne dislocate in corrispondenza dei giunti sono terne destre con l'asse z sempre normale al piano del disegno ed uscente.

La posizione dell'origine del sistema 4 (baricentro del corpo) rispetto al sistema X_0, Y_0 risulta data dall'espressione:

X_0

$$\mathbf{P}_4 = T_1^0 * T_2^1 * T_3^2 * T_4^3 * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Con i sistemi di riferimento solidali ai vari segmenti si potrà quindi trovare la posizione di ogni punto del corpo (anche, se lo si desidera, di un punto all'interno di un segmento particolare).

Applicazione

Si considerino i seguenti dati:

$$a = \text{lunghezza femore} = \text{lunghezza tibia} = 0.45 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = 0 \quad {}^0d_{1,x} = 1.0 = {}^0d_{1,y} = 0$$

$$\alpha_2 = -110^\circ \quad {}^1d_{2,x} = -a * \cos \alpha_2 \quad {}^1d_{2,y} = -a * \sin \alpha_2$$

$$\alpha_3 = 0 \quad {}^2d_{3,x} = -0.45 \quad {}^2d_{3,y} = 0$$

$$\alpha_4 = 0 \quad {}^3d_{4,x} = -0.4 \quad {}^3d_{4,y} = 0$$

$${}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_1 * {}^1\mathbf{T}_2 * {}^2\mathbf{T}_3 * {}^3\mathbf{T}_4$$

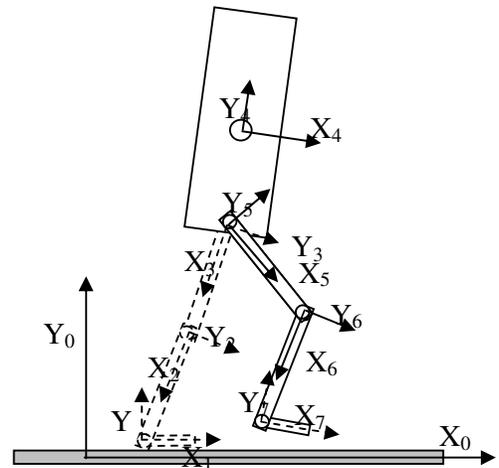
Dopo il calcolo delle singole matrici di trasformazione e del prodotto che porta alla matrice ${}^0\mathbf{T}_4$ otteniamo:

$${}^0\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} -0.3420 & 0.93970 & 0 & 1.4446 \\ -0.9397 & -0.3420 & 0 & 1.2216 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

l'espressione precedente mostra il risultato del prodotto delle matrici di rototraslazione dei vari sistemi di assi. La quarta colonna rappresenta la posizione dell'origine del sistema 4 rispetto al sistema fisso X_0, Y_0 . Con un procedimento analogo si potrebbe trovare la posizione di qualunque punto del corpo rispetto a qualunque riferimento. Del tutto analoga è la procedura per il calcolo della posizione della caviglia del piede anteriore, origine del sistema 7 rispetto al sistema 4 con origine nel tronco o rispetto al sistema fisso.

Determinazione di posizioni e traiettorie.

La posizione assoluta di qualunque punto appartenente ad un segmento corporeo può essere determinata facilmente attraverso la matrice di trasformazione che lega il sistema di assi solidale a quel segmento al sistema di assi di base. Se ad esempio si volesse conoscere la posizione del giunto corrispondente al ginocchio anteriore rispetto al sistema di base si dovrebbe ricavare la matrice ${}^0\mathbf{T}_6$ che riporterà nella quarta colonna le componenti dello spostamento richiesto. Se invece si desiderasse trovare una posizione relativa, ad esempio quella della caviglia avanzata rispetto a quella arretrata la matrice da calcolare sarebbe la ${}^1\mathbf{T}_7$. Per determinare la traiettoria di un punto rilevante del sistema coincidente con l'origine di uno dei sistemi mobili si deve considerare che la matrice di trasformazione tra due sistemi può essere ricavata esplicitamente in funzione di valori definiti degli angoli che definiscono la configurazione del sistema oppure lasciando non risolte le espressioni che contengono questi angoli. In questo caso si potrà calcolare rapidamente la posizione



del punto sostituendo in quelle espressioni i valori degli angoli. Si voglia ad esempio calcolare la traiettoria dell'origine del sistema 4 rispetto al riferimento assoluto. Invece di scrivere la matrice ${}^0_4\mathbf{T}$ esplicitamente come è stato fatto in precedenza si può con semplici passaggi arrivare alla sua espressione simbolica:

$${}^0_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha_{1234} - s\alpha_{1234} & 0 & {}^0d_{1,x} + ac(\alpha_{12}) + ac(\alpha_{123}) + {}^3d_{4,x}c(\alpha_{1234}) \\ s\alpha_{1234} & c\alpha_{1234} & {}^0d_{1,y} + as(\alpha_{12}) + as(\alpha_{123}) + as(\alpha_{1234}) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto è sufficiente dare un campo di variazione per ogni angolo e dividere questi campi in un numero discreto di valori. Si avranno così a disposizione diverse terne di angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a ciascuna delle quali corrisponde un punto della traiettoria dell'origine del sistema 4. Dal punto di vista computazionale non è la stessa cosa valutare ogni matrice di trasformazione separatamente ed effettuare la moltiplicazione per estrarne dalla matrice prodotto la quarta colonna. Se si svolge la moltiplicazione in modo simbolico prima e si calcolano in seguito i valori delle componenti x ed y della quarta colonna si risparmia un notevole numero di operazioni.

Analisi cinematica.

L'analisi cinematica ha come obiettivo quello di determinare le velocità ed accelerazioni in qualunque punto del sistema articolato, quando sono date le velocità angolari dei giunti. Con riferimento al modello articolato precedente, si osservi che l'analisi può cominciare dall'origine del sistema X_1, Y_1 , in quanto questo punto corrisponde alla cerniera dell'arto, che ruota quindi intorno a questo punto finché il piede non si solleva da terra. La velocità del punto O_2 , origine del sistema di riferimento 2 è data dalla relazione :

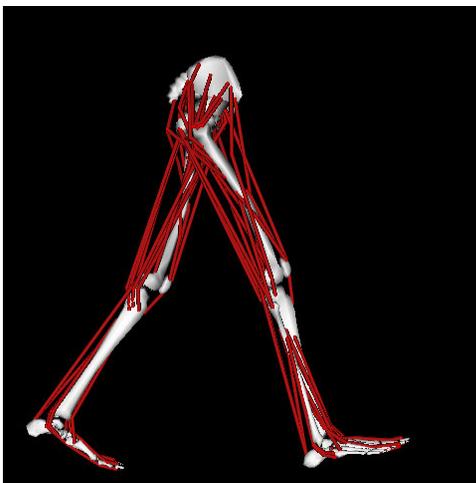
$$\mathbf{v}_{O_2} = \dot{\alpha}_{12} \times \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$$

Se si assume che durante il movimento di rotazione dell'arto arretrato, la gamba sia tesa, cioè sia $\dot{\alpha}_{23} = 0$, si ottiene anche

$$v_{O_3} = v_{O_2} = \dot{\alpha}_{12} \times \mathbf{O}_1\mathbf{O}_3$$

Per la determinazione della velocità del punto O_4 , origine del sistema di riferimento, occorre stabilire se il tronco ruota rispetto al femore. Se così fosse, la velocità del punto O_4 , origine del sistema di riferimento 4, sarebbe:

$$\mathbf{v}_{O_4} = \mathbf{v}_{O_3} + (\dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{34}) \times \mathbf{O}_3\mathbf{O}_4$$

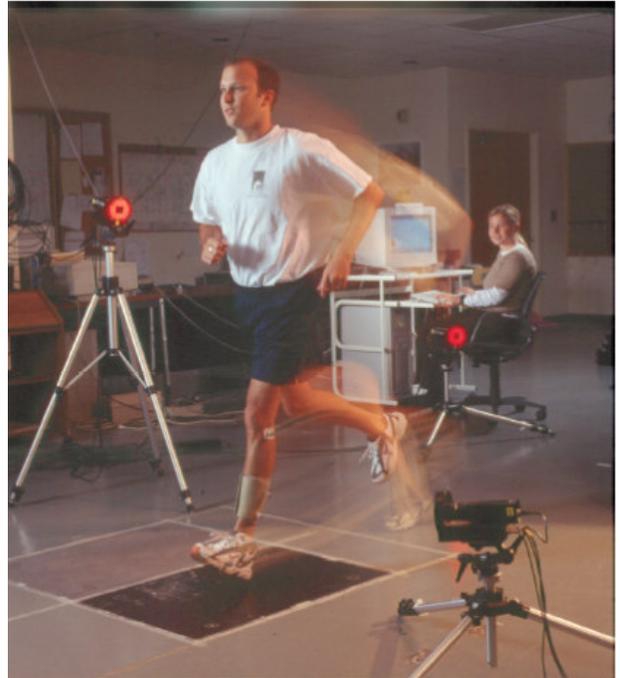


Un discorso analogo vale per le accelerazioni e non verrà quindi qui ripetuto in dettaglio. Si rimanda a quanto detto in generale per la determinazione delle accelerazioni.

Cinematica diretta ed inversa. Obiettivi della biomeccanica.

La cinematica diretta, di cui il caso trattato in precedenza è un esempio, si propone di valutare le traiettorie, velocità ed accelerazioni di una serie di punti appartenenti al sistema in esame, e la valutazione dei parametri del movimento come le escursioni angolari dei giunti le variazioni di lunghezza dei muscoli e ogni altro elemento utile per formulare un'analisi del funzionamento del sistema in esame. La cinematica diretta impiega le

equazioni cinematiche viste in precedenza applicandole ad un modello matematico costituito in genere da segmenti rigidi collegati con giunti ideali. La complessità del modello dipende dagli obiettivi dell'analisi. Quando ad esempio si intende trattare in forma chiara e lineare i problemi della cinematica un modello piano, costituito cioè da segmenti mobili in un piano collegati con giunti rotoidali, è in genere sufficiente per gli scopi di illustrazione dei principi di base. Per la trattazione di problemi applicativi più complessi si deve ricorrere a modelli tridimensionali, di maggiore sofisticazione. In questo caso la scelta può essere quella di adottare uno dei tanti sistemi di modellazione biomeccanica presenti sul mercato, come il pacchetto freeware OpenSim di cui la figura presenta un'esemplificazione, oppure di costruire, nel caso l'analisi faccia parte di un'attività di ricerca, un modello ad-hoc con le caratteristiche e la complessità adatte all'analisi da svolgere. Nell'ambiente di simulazione citato sono possibili analisi di vario tipo ed estensione. E' possibile dopo avere caricato un modello dell'intero corpo, o dei segmenti che interessa studiare, creare una legge di movimento che viene fatta eseguire al modello. Durante l'esecuzione è possibile tracciare con opportuni diagrammi tutti i parametri del movimento e le azioni interne ed esterne. La biomeccanica ha spesso come obiettivo quello di risalire dall'analisi del movimento alla presenza di particolari patologie od anomalie posturali, oppure quello di ottimizzare i parametri del movimento nella



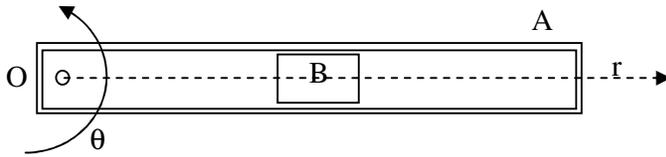
ricerca del miglioramento delle prestazioni sportive. E' anche frequente il caso che l'analisi del movimento sia un sistema per il monitoraggio dei risultati di una cura o di un'attività riabilitativa. In questi casi si ricorre all'analisi cinematica sperimentale mediante il rilievo, durante il moto, delle traiettorie di punti particolari del corpo in cui vengono apposti marks riflettenti, ripresi da sistemi di telecamere affacciate alla scena del movimento. Non entriamo in merito all'architettura dei sistemi e dei sensori impiegati per queste analisi sperimentali, lasciando questo compito alla letteratura specializzata. In questa sede cercheremo di trattare brevemente le tecniche di analisi impiegate.

Si parte dalle registrazioni delle telecamere, costituite in genere da una serie di immagini prese ad intervalli temporali molto ravvicinati. Ciascuna immagine viene analizzata per misurare la posizione dei vari marks e convertirla nel sistema di riferimento esterno. Per ogni mark si ricava in funzione del tempo la posizione rispetto ad un sistema di riferimento fisso esterno. Dalle posizioni assolute dei marks si risale alle posizioni dei vari segmenti del corpo. Sono quindi facilmente ricavabili gli angoli caratteristici dei giunti e le posizioni dei giunti in funzione del tempo. Semplici operazioni di derivazione numerica permettono poi di giungere al campo di velocità ed accelerazione di tutti i punti del sistema in esame. Di norma al rilievo delle traiettorie dei marks posti sui segmenti degli arti si aggiunge la misura mediante una piattaforma baropodometrica delle forze scambiate col suolo. L'integrazione dei dati cinematici con l'informazione di forza permette di ottenere attraverso algoritmi di dinamica inversa le azioni muscolari generatrici dello stato di moto analizzato. Si tornerà sull'argomento nei capitoli dedicati alla dinamica.

2.3 ESERCIZI

Velocità e accelerazioni.

C.1



La rotazione del braccio OA avviene secondo la legge $\theta = 0.2*t + 0.02*t^3$. Nello stesso tempo l'equipaggio mobile B si muove lungo la scanalatura del braccio con la legge $r = 0.02 + 0.04*t^2$. Calcolare il modulo della velocità dell'equipaggio

mobile per $t = 3$ s.

Soluzione

$$\theta = 0.2*t + 0.02*t^3 \quad r = 0.02 + 0.04*t^2$$

La velocità del pattino è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento, la prima diretta secondo l'asse r, la seconda normale a questo.

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$$

$$v_t = \dot{\theta}(0.02 + 0.04t^2) = (0.2 + 0.06t^2)(0.02 + 0.04t^2)$$

$$\text{per } t = 3 \quad v_t = (0.2 + 0.02*3*9)(0.02 + 0.04*9) = 0.28 \text{ m/s}$$

$$v_r = \dot{r}_{t=3} = 2*0.04*3 = 0.24$$

$$v_p = \sqrt{0.28^2 + 0.24^2} = 0.37 \text{ m/s}$$

a

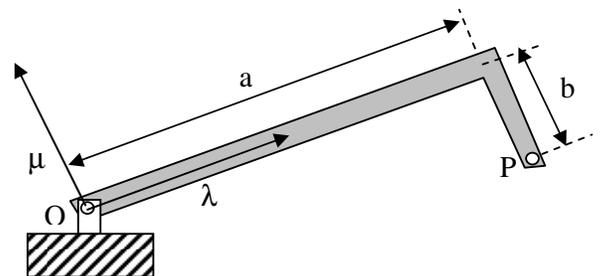
C.2 Una vettura di massa pari a 1200 kg percorre al limite dell'aderenza una curva di 45 m di raggio alla velocità di 65 km/h. Determinare l'accelerazione centripeta della vettura.

Soluzione

L'accelerazione centripeta, diretta dalla posizione della vettura verso il centro della curva ha l'espressione :

$$v_c = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(\frac{65}{3.6}\right)^2}{45} = 7.24 \text{ m/s}^2$$

C.3 L'asta in figura ha $a = 1$ m $b = 0.5$ m. Determinare l'accelerazione vettoriale del punto P quando l'asta ruota in senso orario con $\omega = 20$ rad/s e $\dot{\omega} = 2$ rad/s.



Soluzione

La posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento λ, μ rotante insieme all'asta è:

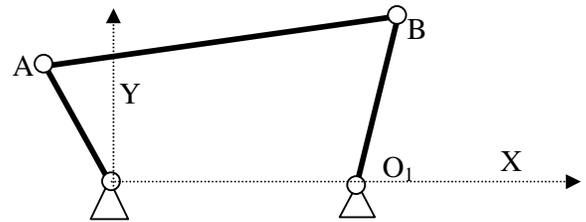
$$\mathbf{r}_p = \lambda - 0,5\boldsymbol{\mu}$$

derivando si ha :

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \times \lambda - 0,5\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} = -20\boldsymbol{\mu} - 10\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \lambda + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \lambda - 0,5\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\mu} - 0,5\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} = -2\boldsymbol{\mu} - 400\lambda - \lambda + 200\boldsymbol{\mu} = \\ &= -402\lambda + 198\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

C.4 Nel quadrilatero articolato mostrato nella figura l'asta OA possiede una velocità angolare pari a 10 rad/s, costante, in senso antiorario. Nella posizione mostrata in figura le coordinate del punto A rispetto ad un sistema di assi con origine nel punto O sono $x_A = -50$ mm, $y_A = 80$ mm, quelle di B $x_B = 200$ mm $y_B = 120$ mm e $OO_1 = 150$ mm. Determinare per mezzo di una costruzione grafica la velocità e l'accelerazione del punto B.



Soluzione

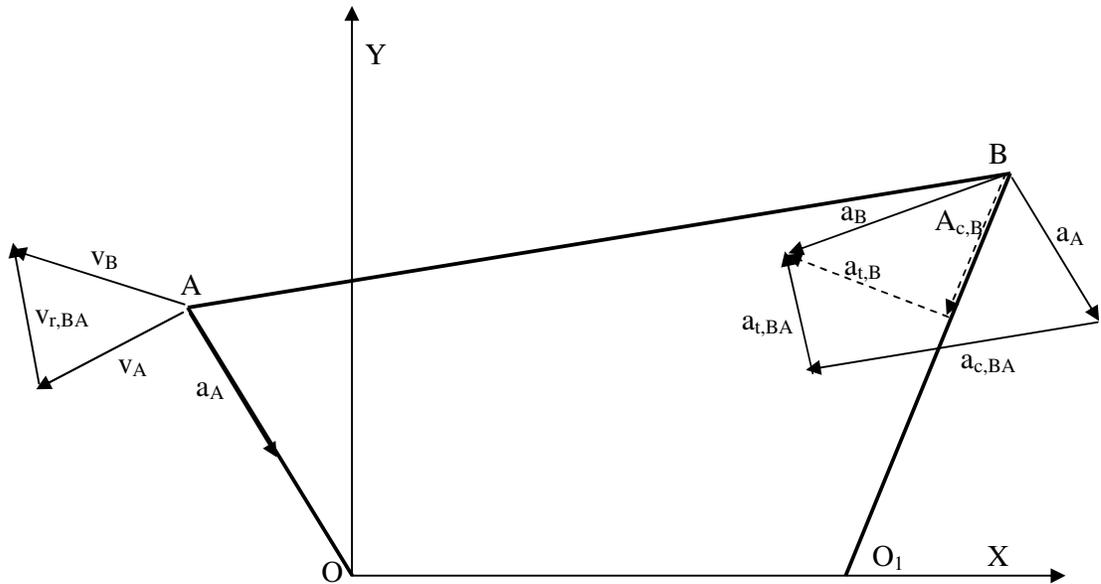
Si ricordi che $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{r,BA}$. Si calcoli prima il modulo della velocità del punto A, dato da:

$$v_A = 10 * OA = 10 * \sqrt{(0,06^2 + 0,08^2)} = 1 \text{ m/s}$$

si riporti quindi con una scala opportuna un segmento che rappresenta v_A , a partire dal punto A con direzione perpendicolare ad OA e verso coerente col senso della velocità angolare dato. Si tracci poi in serie al segmento tracciato un segmento indefinito perpendicolare ad AB. Questo segmento rappresenta la direzione della velocità $v_{r,AB}$ della velocità relativa di B rispetto ad A. Si tracci infine, sempre a partire dal punto A un segmento indefinito perpendicolare ad AB. Questo segmento intersecherà quello precedente in un punto che individua la lunghezza del vettore che rappresenta la velocità di B. Per le accelerazioni si ricordi che:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{r,BA} = \mathbf{a}_{cA} + \mathbf{a}_{tA} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{AB} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{AB} = \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{OA} + 0 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{AB} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{AB} \end{aligned}$$

la costruzione grafica si limita a trasporre la precedente relazione vettoriale in termini geometrici. Si tracci quindi, usando una scala opportuna, un vettore di modulo pari a $\omega_1^2 * AB = 100 * 0,1 = 10 \text{ m/s}^2$ diretto secondo OA, con verso da A ad O. Il vettore tracciato rappresenta l'accelerazione del punto A che, per l'ipotesi assunta $\omega_1 = \text{cost}$ coincide con l'accelerazione centripeta di A. si trasporti ora per comodità di costruzione il segmento tracciato a partire dal punto B. Si tracci in serie al segmento trasportato un altro segmento, nella scala assunta, di modulo pari a $\omega_2^2 * AB$, parallelo ad AB e da B verso A. Si tenga presente che il valore di ω_2 deve essere desunto dal modulo del segmento $v_{r,BA}$, pari appunto a $\omega_2^2 * AB$. Dalla punta dell'ultimo vettore tracciato si tracci ancora un segmento indefinito con direzione perpendicolare ad AB. A questo punto si ritorna al punto B per tracciare il vettore che rappresenta la sua accelerazione centripeta, di modulo pari a $\omega_3^2 * O_1B$. Il valore di ω_3 viene calcolato a partire dal segmento che rappresenta la velocità v_B il cui modulo è appunto $\omega_3 * O_1B$. Ovviamente la lunghezza del segmento deve prima essere convertita attraverso la scala delle velocità in m/s, prima di poter calcolare il valore di ω_3 . A questo punto si traccia ancora un segmento indefinito che rappresenta la linea d'azione dell'accelerazione tangenziale di B. Questo

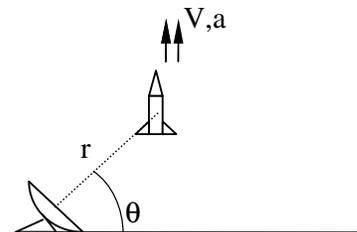


segmento incontrerà quello, anch'esso indefinito che rappresenta l'accelerazione tangenziale relativa di B rispetto ad A. L'intersezione ottenuta rappresenta la punta del vettore che rappresenta l'accelerazione di B. La costruzione grafica è riportata nella figura seguente. Per la costruzione si potranno usare tre scale diverse, la prima per la costruzione del quadrilatero, la seconda per le velocità, la terza per le accelerazioni.

C.5 Un missile è lanciato verticalmente e la sua traiettoria è seguita da un radar. Quando l'angolo di puntamento raggiunge il valore $\theta = 60^\circ$ il sistema di misura del radar fornisce i seguenti valori :

$$r = 8000 \text{ m} \quad \dot{r} = 21 \text{ m/s} \quad \dot{\vartheta} = 0,02 \text{ rad/s}$$

Calcolare la velocità e l'accelerazione del missile.



Soluzione.

Ricordando che il missile si muove secondo una traiettoria verticale e le relazioni tra un sistema di riferimento Cartesiano ortogonale e un sistema polare:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta & y &= r \sin \vartheta \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta & \dot{y} &= \dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \vartheta - 2\dot{r} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - r \ddot{\vartheta} \sin \vartheta - r \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \vartheta + 2\dot{r} \dot{\vartheta} \cos \vartheta - r \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \end{aligned}$$

si ha poi:

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos 60^\circ - 8000 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

si ottiene $\dot{r} = 0,02 \cdot 8000 \cdot \tan 60^\circ = 277,13 \text{ m/s}$

$$\dot{y} = 277,13 \cdot \sin 60^\circ + 8000 \cdot 0,02 \cos 60^\circ = 320 \text{ m/s}$$

$$\ddot{x} = \frac{21 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ - 8000 \ddot{\vartheta} \sin 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \cos 60^\circ}{8000 \cdot \sin 60^\circ} = 0$$

$$\ddot{\vartheta} = \frac{21 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 0,02 \cdot \sin 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \cos 60^\circ}{8000 \cdot \sin 60^\circ} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

$$\ddot{y} = 21 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot 277,13 \cdot 2,67 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 60^\circ - 8000 \cdot 2,67 \cdot 10^{-3} \cos 60^\circ - 8000 \cdot 0,02^2 \sin 60^\circ = 5,47 \text{ m/s}^2$$

C.6 Un treno, lanciato alla velocità di 100 km/h, frena diminuendo la sua velocità del 10% nei primi 40 s dall'applicazione dei freni.

a) Calcolare la velocità alla fine dei successivi 80 secondi, assumendo che, durante l'intero periodo di frenatura, la decelerazione sia proporzionale alla velocità.

Soluzione.

La velocità di 100 km/h corrisponde a 27,78 m/s. Al termine dei primi 40 s la velocità è $27,78 \cdot 0,9 = 25 \text{ m/s}$. Se la decelerazione è proporzionale alla velocità, possiamo scrivere:

$$a = -kv \text{ e anche } \frac{dv}{dt} = -kv \quad \frac{dv}{v} = -kdt \text{ da cui si ha:}$$

$$\ln(v) + c = -kt \text{ per } t = 0 \quad v = 27,78 \quad c = -\ln(27,78) \text{ per cui:}$$

$$\ln\left(\frac{v}{27,78}\right) = -kt \text{ per } t = 40 \quad v = 25 \text{ m/s} \quad \ln\left(\frac{25}{27,78}\right) = -k \cdot 40$$

$$k = -\frac{\ln\left(\frac{25}{27,78}\right)}{40} = 2,63 \cdot 10^{-3}$$

Dopo 120 s si ha:

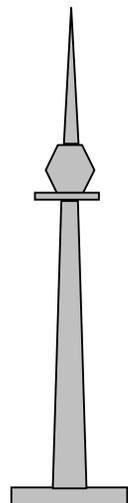
$$\ln(v) = \ln(27,78) - 2,63 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 3,01$$

$$v = e^{3,01} = 20,28 = 73 \text{ km/h}$$

C.7 L'ascensore principale della torre per comunicazioni CN a Toronto sale di 250 m e per la maggior parte della sua corsa ha una velocità di 22 km/h. Assumere che sia la fase d'accelerazione che quella di decelerazione siano percorse con un'accelerazione costante di $\frac{1}{4}g$ (positiva la prima e negativa la seconda) e determinare la durata della corsa. R. $t = 43,4 \text{ s}$.

Soluzione.

La velocità di 22 km/h corrisponde a $22/3,6 = 6,11 \text{ m/s}$. Con un'accelerazione di $0,25g$ il tempo necessario per raggiungerla è di $6,11/(0,25 \cdot 9,81) = 2,49 \text{ s}$. Lo



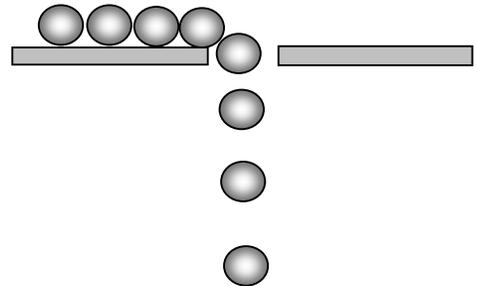
spazio corrispondente è pari a :

$$s = \frac{1}{2} 0,25 * 9,81 * 2,49^2 = 7,60 m$$

Poiché lo spazio di accelerazione e quello di decelerazione sono eguali il tratto percorso a velocità costante è pari a $250 - 2 * 7,60 = 234,8$ m. Questo spazio viene percorso in un tempo di $234,8 / 6,11 = 38,43$ s. Questo tempo sommato a quelli d'accelerazione e decelerazione da $t = 2 * 2,49 + 38,43 = 43,4$ s

C 7.1 Un aereo di massa pari a 50 t atterra su una pista orizzontale alla velocità di 195 km/h con una componente di velocità verticale trascurabile. Subito dopo il contatto all'aeroplano viene applicata una forza frenante data dall'espressione $(55000 + 4 * V^2)$ N, in cui V e' la velocità dell'aereo. Calcolare la lunghezza della corsa di atterraggio.

C.8 Delle piccole sfere d'acciaio cadono da una posizione di riposo al ritmo di 2 al secondo. Trovare la separazione verticale di due sfere consecutive, quando la più bassa è caduta per tre metri. Si trascuri la resistenza dell'aria.



Soluzione

Il moto delle sfere è naturalmente accelerato. Per cadere di tre metri occorre un tempo che si può calcolare risolvendo l'equazione:

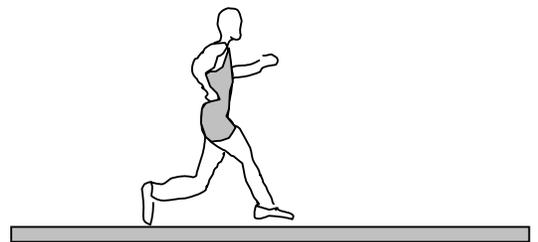
$$h = \frac{1}{2} g t^2 \text{ da cui: } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 * 3}{9,81}} = 0,78 s$$

la sfera precedente è caduta per un tempo corrispondente a $0,78 - 0,5 = 0,28$ s. Lo spazio percorso è quindi:

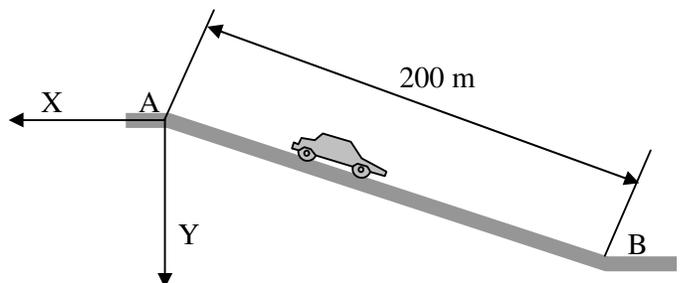
$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2 = 0,5 * 9,81 * 0,28^2 = 0,38 m$$

la distanza tra le sfere nell'istante considerato è quindi di $3 - 0,38 = 2,62$ m

C.9 Uno scattista raggiunge la sua massima velocità v_{max} in 2,5 s dalla partenza con accelerazione costante. Quindi mantiene la velocità e termina i 100 m in un tempo totale di 10,4 s. Determinare la velocità massima v_{max} . R. $v_{max} = 10,93$ m/s (vedere la soluzione all'interno del testo).



C.10 Il conducente di una vettura, inizialmente ferma nel punto A rilascia il freno a mano e lascia andare in folle la vettura con un' accelerazione pari a $0,981 - 0,013 v^2$, essendo v la velocità del veicolo. Determinare la velocità in B. R. $v = 8,66$ m/s.



Soluzione.

Con riferimento al sistema X-Y assunto in figura si ha:

$$\frac{dv}{dt} = 0,981 - 0,013v^2 \quad \text{si ha poi} \quad \frac{dv}{0,981 - 0,013v^2} = dt$$

ponendo $k_1 = 0,981$ $k_2 = 0,013$ e $v = \dot{y}$ si ha:

$$\frac{d\dot{y}}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dt = \frac{dy}{\dot{y}} \quad ; \quad \frac{\dot{y}d\dot{y}}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dy$$

Integrando si ha:

$$-\frac{1}{2k_2} \frac{d(k_1 - k_2\dot{y}^2)}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = dy \quad -\frac{1}{2k_2} \int_0^v \frac{d(k_1 - k_2\dot{y}^2)}{k_1 - k_2\dot{y}^2} = \int_{y_0}^{y_1} dy = y_1$$

$$-\frac{1}{2k_2} \ln \frac{(k_1 - k_2\dot{y}_{t=t_1}^2)}{(k_1 - k_2\dot{y}_{t=0}^2)} = y_1$$

Ricordando che

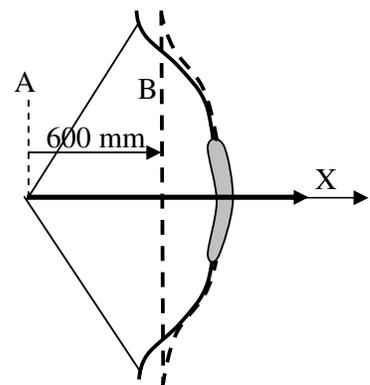
$$k_1 = 0,981 \quad k_2 = 0,013 \quad y_1 = 200 \text{ m} \quad y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$$

$$-\frac{1}{2 * 0,013} \ln \frac{(0,981 - 0,013\dot{y}_{t=t_1}^2)}{0,981} = 200$$

$$0,013\dot{y}_{t=t_1}^2 = 0,981 * (1 - e^{-2 * 0,013 * 200})$$

$$v = \sqrt{\frac{0,981 * (1 - e^{-2 * 0,013 * 200})}{0,013}} = 8,66 \text{ m/s}$$

C.11 In una gara di tiro all'arco l'accelerazione della freccia varia linearmente con la distanza s dal suo valore iniziale di 4800 m/s^2 in A al rilascio dell'arco, sino a zero in B, dopo una corsa di 600 mm . Calcolare la velocità massima della freccia. R $53,7 \text{ m/s}$.



Soluzione.

Si tratta di un problema nel quale l'accelerazione dipende dalla posizione. E' facile osservare che, assumendo che la legge di variazione dell'accelerazione con la posizione della freccia sia lineare si abbia:

$$a = \frac{dv}{dt} = 4800 \left(1 - \frac{x}{0,6}\right) \quad ; \quad dv = 4800 \left(1 - \frac{x}{0,6}\right) dt = 4800 \left(1 - \frac{x}{0,6}\right) \frac{dx}{v}$$

Integrando la relazione

$$v dv = 4800 \left(1 - \frac{x}{0,6}\right) dx$$

precedente si ha:

$$\int_0^v v dv = \frac{1}{2} v^2 = \int_0^{0,6} 4800 \left(1 - \frac{x}{0,6}\right) dx \quad v = \sqrt{2(4800 * 0,6 - \frac{4800}{2} * \frac{0,6^2}{0,6})} =$$

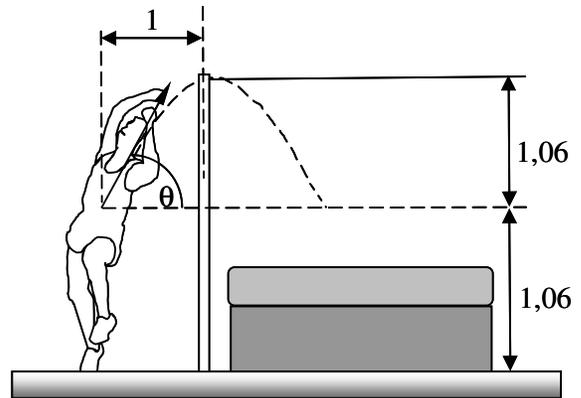
$$= \sqrt{4800 * 0,6} = 53,66 \text{ m/s}$$

C 12. Il baricentro di un saltatore in alto segue la traiettoria in figura. Determinare la velocità v_0 al distacco e l'angolo θ , se il culmine della traiettoria è appena al disopra dell'asta.

R. $\theta = 64,7^\circ$, $v_0 = 5,03 \text{ m/s}$

Soluzione.

Possiamo considerare il moto del saltatore come quello di un punto materiale la cui velocità iniziale sia v_0 , inclinata dell'angolo θ sull'orizzontale. La traiettoria è un arco di parabola tangente alla sommità con l'asta orizzontale da superare nel salto. Si ha quindi:



$$x = v_0 \cos \vartheta * t \quad y = v_0 \sin \vartheta * t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \vartheta \quad \dot{y} = v_0 \sin \vartheta - g t$$

Al momento del passaggio dell'asticella si ha $x = 1$ e $y = 1,06$ per cui:

$$0 = v_0 \sin \vartheta - g t_1 \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

$$y_{t=t_1} = \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{g} = 1,06$$

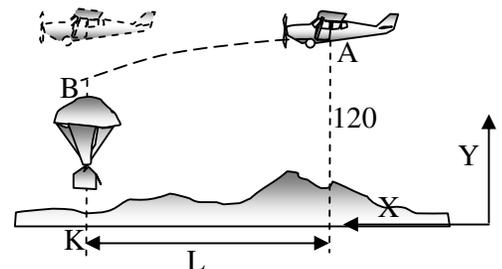
$$x_{t=t_1} = v_0 \cos \vartheta * \frac{v_0 \sin \vartheta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g} = 1$$

Dividendo membro a membro le relazioni precedenti si ottiene:

$$\tan \vartheta = 2 * 1,06 \quad \vartheta = 64,7^\circ$$

$$e \quad 0 = v_0 \sin \vartheta - \frac{g * 2 * 1,06}{v_0 \sin \vartheta} \quad \text{da cui} \quad v_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{2 * g * 1,06} = 5,03 \text{ m/s}$$

C.13 Un piccolo aeroplano vola orizzontalmente con una velocità di 300 km/h ad una quota di 120 m sopra una valle alpina per lanciare medicinali d'emergenza in A. Il pacco ha un paracadute che si apre in B e permette la discesa verticale dei medicinali alla velocità costante di 1,8 km/h. Se il lancio è pianificato in modo tale che il pacco raggiunge il suolo dopo 37 s dopo il rilascio in A, determinare la distanza di anticipo orizzontale in modo tale che il pacco centri il punto d'atterraggio. Trascurare la resistenza dell'aria.



Soluzione.

Anche in questo caso possiamo considerare che il moto del pacco con paracadute sia assimilabile al moto di un punto materiale la cui componente orizzontale di velocità iniziale è eguale alla velocità dell'aereo. Il moto del pacco è composto di due fasi. Da A a B il pacco compie una traiettoria balistica con le componenti di velocità

$$v_x = 300/3,6 = 83,3 \text{ m/s} \quad v_y = gt$$

da B al punto di contatto col suolo il pacco cade con velocità costante di $1,8/3,6 = 0,5 \text{ m/s}$

Il problema è quindi risolto impostando le equazioni:

$$x_B - x_A = 83,3 * t_{AB} = L \quad y_B = 0,5 * t_{BK} \quad t_{AB} + t_{BK} = 37$$

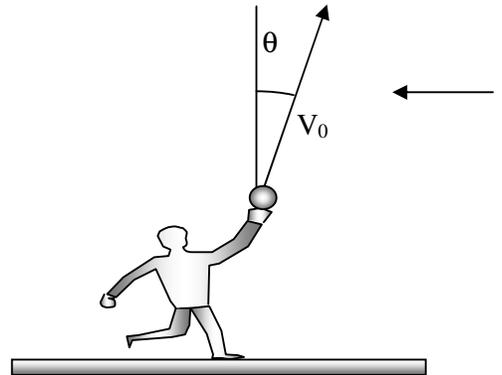
$$120 - y_B = \frac{1}{2} 9,81 * t_{AB}^2$$

Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite t_{AB} , t_{BK} , y_B , L . Si ha con semplici operazioni:

$$\frac{1}{2} 9,81 * t_{AB}^2 + 0,5 * (37 - t_{AB}) = 120 \quad ; \quad 4,91 * t_{AB}^2 - 0,5 * t_{AB} - 111,5 = 0$$

$$t_{AB} = 4,82 \text{ s} \quad L = 83,3 * 4,82 = 401,2 \text{ m}$$

C.14 Un ragazzo lancia una palla verso l'alto con un'inclinazione θ rispetto alla verticale e una velocità di 12 m/s . Il vento produce un'accelerazione orizzontale di $0,4 \text{ m/s}^2$ verso sinistra. Con quale angolo deve essere lanciata la palla perché ritorni al punto di partenza? R. $\theta = 2,33^\circ$.



Soluzione.

Si tratta di un problema di moto accelerato. Scrivendo separatamente le espressioni del moto accelerato per la componente x e y si ha:

$$v_x = 12 \sin \vartheta - 0,4 * t \quad v_y = 12 \cos \vartheta - gt$$

$$x = 12 \sin \vartheta t - \frac{1}{2} 0,4 * t^2 \quad y = 12 \cos \vartheta t - \frac{1}{2} g t^2$$

la palla raggiungerà la massima altezza quando la componente v_y della velocità si annulla, al tempo t_1 dato dall'espressione:

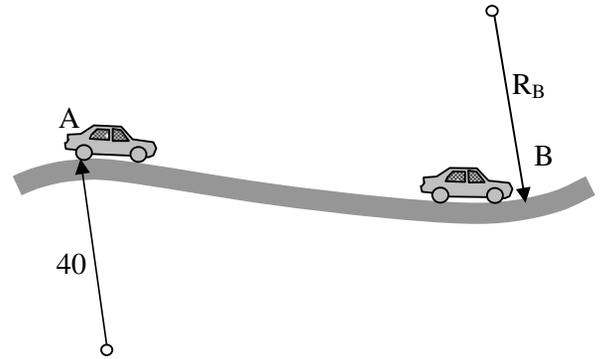
$$0 = 12 \cos \vartheta - g t_1 \quad t_1 = \frac{12 \cos \vartheta}{g}$$

E' facile osservare che il tempo totale necessario per la salita e la discesa della palla è $2 * t_1$ perché determinato dalla componente verticale della velocità. Sostituendo questo tempo nell'espressione della componente x e imponendo l'annullamento di questa si ha:

$$x = 12 \sin \vartheta 2t_1 - \frac{1}{2} 0,4 * 4t_1^2 = 12 \sin \vartheta * 2 * \frac{12 \cos \vartheta}{g} - \frac{1}{2} 0,4 * 4 * \frac{12^2 \cos^2 \vartheta}{g^2} = 0$$

$$\text{da cui} \quad \tan \vartheta = \frac{0,4}{g} \quad \vartheta = 2,33^\circ$$

C.15 La velocità di un'auto aumenta uniformemente col tempo da 50 km/h in A a 100 km/h in B nell'arco di 10 s. Il raggio di curvatura della strada in A è 40 m. Se il modulo dell'accelerazione complessiva dell'auto è lo stesso in B e in A calcolare il raggio di curvatura della strada in B. Il baricentro dell'auto dista 0,6 m dal fondo stradale. $R=156,5$ m



Soluzione.

L'accelerazione nel punto A è la somma dell'accelerazione centripeta e di quella tangenziale:

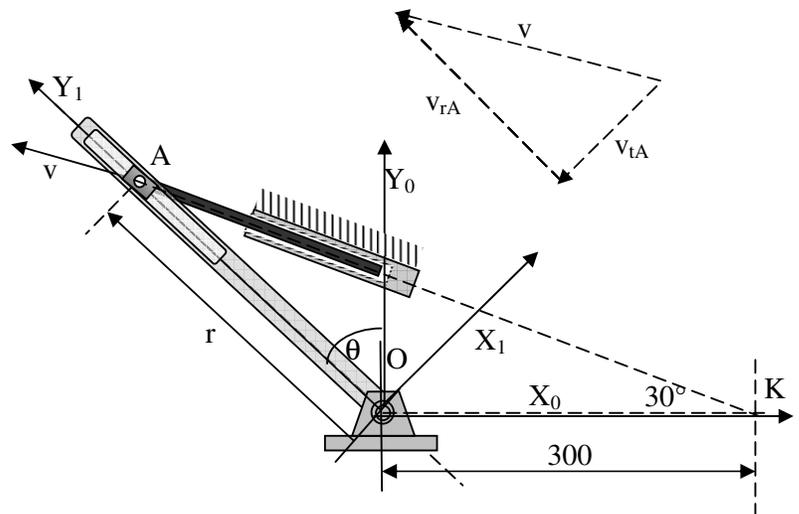
$$a_A = \sqrt{a_{cA}^2 + a_{tA}^2} = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{50}{3,6}\right)^2}{40,6}\right)^2 + \left(\frac{100-50}{3,6*10}\right)^2} = 4,95 \text{ m/s}^2$$

Nel punto B si ha

$$a_B = a_{cB} = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2}{R_B - 0,6} = 4,95 \text{ m/s}^2 \quad R_B = 156,47 \text{ m}$$

Sistemi articolati

C.16 Un cilindro idraulico dà al perno A una velocità costante $v = 2$ m/s lungo il suo asse per un certo intervallo di tempo e, nello stesso tempo, fa ruotare il braccio scanalato intorno ad O. Determinare i valori di $\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\theta}$ nell'istante in cui $\theta=30^\circ$.



Soluzione.

Cominceremo a trattare la determinazione di \dot{r} essendo r la distanza del perno dello stelo del pistone dal centro di rotazione del braccio oscillante (detto anche glifo). Consideriamo due sistemi di coordinate, il primo fisso X_0, Y_0 , il secondo mobile, X_1, Y_1 . La velocità del perno A del pistone rispetto al sistema fisso può essere considerata come somma della velocità dello stesso punto rispetto al sistema mobile più la velocità di trascinamento, vale a dire la velocità che il punto A avrebbe se fosse solidale al glifo oscillante. Si ha quindi.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{tA} + \mathbf{v}_{rA}$$

Poiché la velocità di A rispetto al glifo, cioè rispetto al sistema mobile non può che essere diretta come il glifo e quella di trascinamento non può che essere normale al glifo i moduli di queste due velocità valgono rispettivamente:

$$v_{tA} = v \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot v = 1 \text{ m/s} \quad v_{rA} = v \cdot \cos 30^\circ = 1,73 \text{ m/s}$$

Graficamente il problema si risolve in modo molto semplice, è sufficiente tracciare un vettore in scala che rappresenta la velocità assoluta v_A e tracciare a partire dalle sue estremità due linee parallele rispettivamente alla direzione del glifo e alla sua normale. La costruzione è mostrata nella figura. Si tenga presente che per rendere la costruzione più visibile si è adottata una scala della velocità diversa rispetto al resto del disegno. Si osservi ora che se $\theta = 30^\circ$ il triangolo AOK è isoscele, quindi $r = 300 \text{ mm}$. La velocità angolare del glifo si ottiene subito considerando che la velocità di trascinamento è data dall'espressione $v_{tA} = \dot{\vartheta} \cdot r$ da cui $\dot{\vartheta} = \frac{1,73}{0,3} = 5,77 \text{ rad/s}$. Per

quanto riguarda l'accelerazione angolare $\ddot{\vartheta}$ del glifo, osserviamo che la velocità dell'estremità A del pistone è costante in modulo e in direzione, quindi la sua accelerazione è nulla. Le leggi del moto relativo dicono che l'accelerazione di A è data dall'espressione:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{tA} + \mathbf{a}_{rA} + \mathbf{a}_C$$

l'accelerazione di trascinamento è la somma di un componente centrifuga, completamente nota in quanto diretta come il glifo, con direzione da A verso O e modulo $\dot{\vartheta}^2 \cdot r = 5,77^2 \cdot 0,3 = 9,99 \text{ m/s}^2$ e una componente tangenziale con direzione normale al glifo e di modulo incognito pari a $\ddot{\vartheta} \cdot r = \ddot{\vartheta} \cdot 0,3$. Dell'accelerazione relativa si conosce soltanto la direzione, quella del glifo, mentre l'accelerazione di Coriolis ha modulo pari a $2 \cdot \dot{\vartheta} \cdot v_{rA} = 2 \cdot 5,77 \cdot 1,73 = 19,96 \text{ m/s}^2$ ed è diretta perpendicolarmente al glifo da destra verso sinistra. Scrivendo la relazione precedente in funzione dei versori $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ del sistema mobile si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9,99 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta} \cdot 0,3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{rA} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -19,96 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

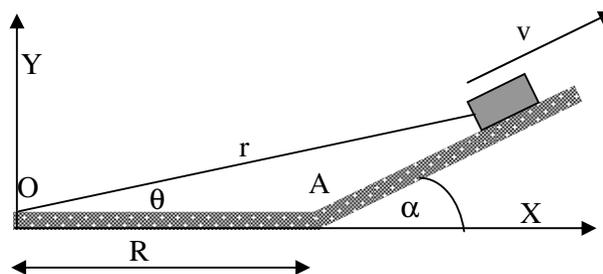
La relazione vettoriale scritta corrisponde a tre equazioni scalari di cui soltanto due hanno significato perché la terza è un'identità. Si ottiene quindi:

$$a_{rA} = 9,99 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{\vartheta} = \frac{19,96}{0,3} = 66,5 \text{ rad/s}^2$$

Immediata è la soluzione per via grafica che parte dal tracciamento di un vettore che rappresenta la componente centrifuga della velocità di trascinamento. A questo si fa seguire il vettore che rappresenta l'accelerazione di Coriolis e, di seguito una linea indefinita che rappresenta la retta d'azione dell'accelerazione relativa. Ripartendo dall'inizio si traccia un'altra linea indefinita perpendicolare alla direzione del glifo che rappresenta la direzione della componente tangenziale dell'accelerazione di trascinamento. L'intersezione delle due ultime linee permette di chiudere il diagramma delle accelerazioni.

C.17 Il piccolo blocco P parte da fermo al tempo $t = 0$ in corrispondenza del punto A e sale sul piano inclinato con accelerazione costante. Determinare \dot{r} in funzione del tempo.

$$R. \quad \dot{r} = \frac{0.5at(2R\cos\alpha + at^2)}{\sqrt{(R^2 + Rat^2\cos\alpha + \frac{1}{4}a^2t^4)}}$$



Soluzione.

S'indichi con s lo spazio percorso dal blocco sul piano inclinato. Questo spazio è espresso in funzione del tempo e dell'accelerazione dall'espressione:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Utilizzando il teorema di Carnot la distanza r si può esprimere mediante la relazione:

$$r^2 = R^2 + (\frac{1}{2}at^2)^2 + 2R * \frac{1}{2}at^2 * \cos\alpha$$

Derivando si ha :

$$2r\dot{r} = 2 * \frac{1}{2}at^2 * at + 2R\cos\alpha * \frac{1}{2}a * 2t$$

$$\dot{r} = \frac{0.5at(2R\cos\alpha + at^2)}{\sqrt{(R^2 + Rat^2\cos\alpha + \frac{1}{4}a^2t^4)}}$$

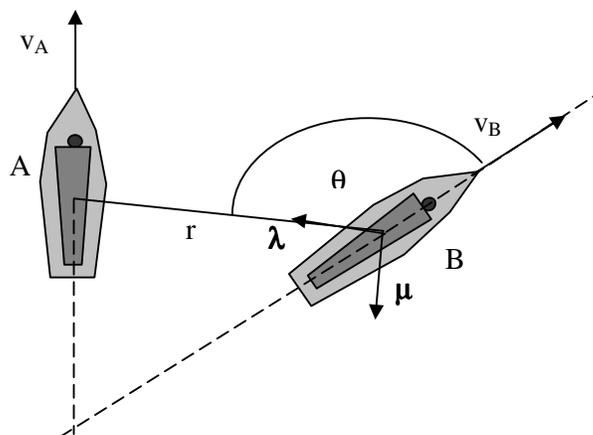
Moto relativo

C.18 Due navi A e B si muovono con velocità costante v_A , v_B rispettivamente lungo rotte che si intersecano. Il timoniere di B nota la velocità di variazione della distanza r tra le navi e l'angolo di rilevamento θ . Mostrare

$$\text{che } \ddot{\vartheta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} \quad \ddot{r} = r\dot{\vartheta}^2.$$

Soluzione.

Osserviamo che rispetto alla nave B la posizione della nave A in coordinate polari è definita dalle due coordinate r, θ . Per i teoremi del moto relativo, l'accelerazione assoluta di A



è data dalla somma dell'accelerazione di trascinamento, nulla per la supposta costanza di v_B , dell'accelerazione relativa e di quella di Coriolis. La somma di queste componenti deve essere nulla per la supposta costanza di v_A .

$$a_A = a_B + r\ddot{\vartheta}\mu + \ddot{r}\lambda - r\dot{\vartheta}^2\lambda + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\mu \quad \text{cioè} \quad 0 = 0 + r\ddot{\vartheta}\mu + \ddot{r}\lambda - r\dot{\vartheta}^2\lambda + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\mu$$

Poiché sia la componente secondo λ che quella secondo μ devono essere nulle perché il vettore complessivo sia nullo si avrà: