

DESCRIZIONE DEI RAGGI PARASSIALI

(1)

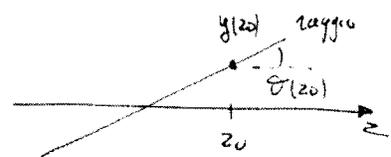
I sistemi ottici sono costituiti da strati di materiali dielettrici omogenei, separati da superfici di discontinuità piane o sferiche. Un sistema ottico si dice centrato se le superfici piane e sferiche sono tutte centrate su di un unico asse, detto asse ottico, che nel seguito considereremo, se necessario, come asse z .

Il primo problema che viene affrontato nella analisi di un sistema ottico è quello di determinare, all'interno del sistema, le traiettorie dei raggi.

Noi ci limiteremo per ora a considerare raggi parassiali in un sistema ottico centrato. Un raggio si dice parassiale se l'angolo che forma con l'asse ottico è piccolo, e di conseguenza la sua traiettoria non si discosta dall'asse ottico stesso.

Considereremo inoltre raggi che restano sempre in un unico piano che comprende l'asse ottico, piano che sarà indicato con (y, z) . In tal modo la traiettoria di un raggio può essere completamente specificata fornendo l'andamento di y e di θ al variare di z .

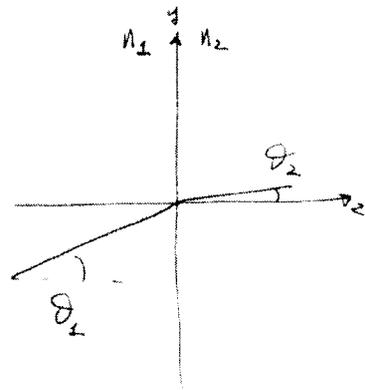
Nel seguito θ sarà positivo se θ in senso antiorario (come in figura)



L'analisi di un tale sistema può essere fatta se conosciamo il comportamento di un raggio nelle zone omogenee, ad una interfaccia piana e ad una interfaccia sferica.

Convincre un'azione (per un motivo che apparirà chiaro più avanti) da una interfaccia piana tra due mezzi con indice di rifrazione n_1, n_2 . (2)

Dalla figura risulta che la traiettoria del raggio alla interfaccia è determinata da



$$y(0^-) = y(0^+)$$

$$\theta(0^-) = \theta_1 \quad (1)$$

$$\theta(0^+) = \theta_2$$

Tra i due angoli vale la legge di Snell $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

Nell'ipotesi di raggi parassiali, possiamo approssimare $\sin \theta$ con il primo termine della sua approssimazione in serie di Taylor⁽¹⁾

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{a } |\theta| \ll 1$$

e quindi dalla legge di Snell segue

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

ovvero

$$n_1 \theta(0^-) = n_2 \theta(0^+) \quad (2)$$

che completa la (1)

¹⁾ Da qui il nome di "ottica al primo ordine" che concerne l'analisi dei soli raggi parassiali in un sistema ottico centrato.

Da (1) e (2) si vede che ~~le~~ ~~traiettorie~~ le traiettorie dei raggi sono descritte da y e $V = nD$, questi parametri non cambiano in una interfaccia piana. Pertanto faremo questa scelta nel seguito.

Questo ci consentirà di considerare solo i tratti omogenei e le interfacce sferiche, ma non quelle piane.

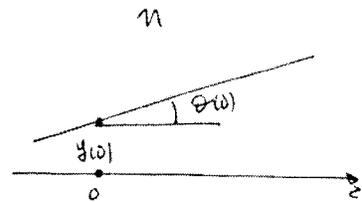
(3)

PROPAGAZIONE OMOGENEA - MATRICE DEI RAGGI

(4)

Consideriamo ora la traiettoria dei raggi in una zona omogenea, di indice di rifrazione n

Risulta, dalla figura,



$$y(z) = y(0) + \tan \theta(0) \cdot z \quad (3)$$

[La relazione che esiste tra il raggio all'inizio e alla fine di un tratto di lunghezza L è quindi

Nella ipotesi parassiale $\tan \theta \approx \theta$ e quindi

$$y(z) \approx y(0) + \theta(0) \cdot z = y(0) + \frac{1}{n} V(0) z \quad (4)$$

$$y(L) = y(0) + \frac{1}{n} L \cdot V(0)$$

$$V(L) = V(0) \quad (5)$$

Esiste quindi una relazione lineare tra i parametri del raggio all'inizio ed alla fine della zona omogenea.

Conviene sfruttare questo fatto (che ritroveremo anche per una superficie sferica) descrivendo il raggio mediante un vettore numerico

$$\begin{pmatrix} y \\ V \end{pmatrix} \quad (6)$$

è la sua trasformazione mediante una matrice (matrice dei raggi).

Nel nostro caso (usando i pedici 1 e 2 per il raggio all'ingresso e all'uscita)

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

La matrice di una lente omogenea è quindi

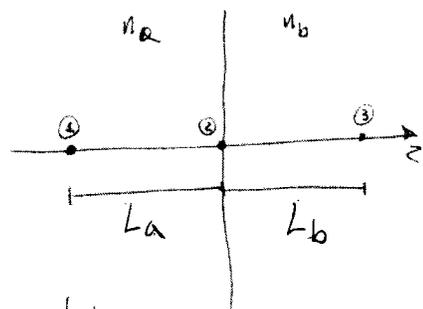
$$\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Il vantaggio di questa descrizione matriciale è che la matrice di un sistema ottico centrato, comunque complesso, si ottiene facilmente dalle matrici dei singoli componenti.

Concludiamo ad esempio il caso di due tratti omogenei in cascata (vedi figura).

Per il primo tratto risulta

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_a/n_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$



La discontinuità media non modifica i parametri dei raggi (ovvero y_2, V_2 sono i parametri sia prima, sia dopo la

discontinuità) e per la seconda zona nulla

(6)

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_b/n_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

In definitiva, sostituendo $\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_b/n_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_a/n_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

La matrice complessiva del sistema ottico si ottiene facendo il prodotto delle matrici dei singoli componenti, partendo dall'ultimo (e quindi in ordine inverso rispetto alla direzione di propagazione dei raggi).

Si noti che ~~non~~ potremmo, volendo, ~~considerare~~ ~~la~~ considerare una discontinuità piana come descritta da una matrice identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e inserirla tra le due matrici di propagazione omogenea. Naturalmente tale matrice non ha effetto sui calcoli e quindi possiamo evitarla.

Sviluppando il prodotto si vede che la matrice complessiva del nostro sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L_a}{n_a} + \frac{L_b}{n_b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo risultato può essere immediatamente generalizzato alla matrice di una sequenza di zone omogenee e interfacce piane, che ha come matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \sum_i \frac{L_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

dove L_i, n_i sono lunghezza e indice di rifrazione di ciascuna zona.

Conseguenza della (9) è che il prodotto nD è costante in tutto un sistema di questo tipo. A tale risultato si perviene anche dalla legge di Snell (di cui questo è un caso particolare).

Per una sequenza di zone omogenee con interfacce piane risulta

$$n_i \sin \theta_i = \text{cost} \quad (10)$$

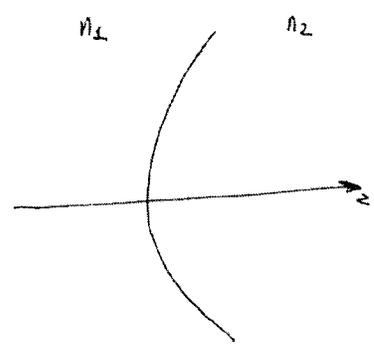
(dove la costante è $n_0 \sin \theta_0$, calcolata nella zona da cui arriva il raggio).

Pertanto la legge di Snell vale anche se applicata tra due zone qualunque, anche se queste non sono adiacenti.

RIFRAZIONE SU DI UNA SUPERFICIE SFERICA

8

Consideriamo ora una superficie sferica
che separa due mezzi di indici di
rifrazione n_1, n_2 .

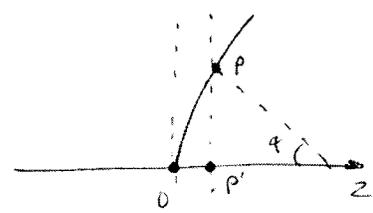


La superficie è descritta dal suo raggio r
dal suo verso (ovvero se è concava o convessa).

Nel seguito indicheremo il raggio di curvatura positivo se il centro
della superficie è a destra della superficie stessa (caso della figura)
ovvero se la superficie è convessa nella direzione di arrivo dei raggi.
Ovviamente il raggio di curvatura sarà negativo in caso contrario.

Consideriamo allora i raggi attraverso la superficie di raggio di curvatura R
(con x ymo).

La prima cosa che notiamo è che la ~~quota~~ ^{ascissa}
di interazione dipende da y . Il raggio per P
è quello per O se vengono rifratti su piani diversi.



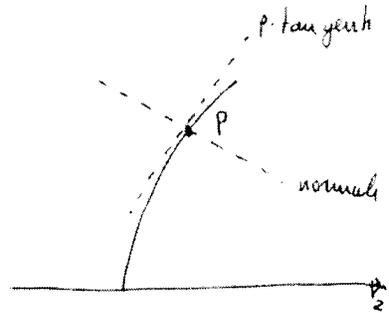
Se α indichiamo con α l'angolo al centro per P , la distanza tra i due
piani vale $OP' = |R| - |R| \cos \alpha = |R| (1 - \cos \alpha)$

In approssimazione parassiale $|\alpha| \ll 1$ e quindi $1 - \cos \alpha \approx \frac{1}{2} \alpha^2$
e quindi trascurabile rispetto alle lunghezze del sistema ottico.

Si assume quindi la rifrazione sul piano per O indipendentemente
dalla quota y del raggio

(9)

Per quanto riguarda la rifrazione, ovviamente ancora valida la legge di Snell⁽¹⁾ ma localmente. In altri termini la rifrazione che subisce il raggio per P viene calcolata come rifrazione nel piano tangente per P.



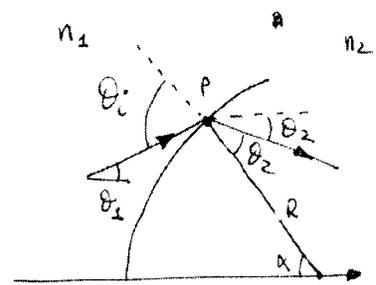
Più semplicemente, quindi, basta considerare la normale alla superficie nel punto P e gli angoli di incidenza e rifrazione rispetto a questa normale (che passa per il centro della superficie sferica)

La legge di Snell fornisce

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

ovvero, in approssimazione parassiale

$$n_1 \theta_i = n_2 \theta_r \quad (11)$$



D'altra parte, dal triangolo con vertice in P segue

$$\pi = \theta_i + \alpha + (\pi - \theta_r)$$

ovvero $\pi - \theta_r$ l'angolo al vertice in P.

⁽¹⁾ Questa ipotesi vale se $|R| \gg \lambda$ e, in ottica geometrica, si assume comunque una lunghezza d'onda infinitesima.

Si ha quindi

(10)

$$\theta_i = \theta_{\perp} + \alpha \quad (12)$$

Analogamente (angolo angoli alterni interni)

$$\alpha = \theta_2 + |\theta_2|$$

e

$$\theta_2 = \alpha - |\theta_2| = \alpha + \theta_2 \quad (13)$$

ovvero

che θ_2 è negativo (vedi figura).

Ora $y = R \tan \alpha \approx R \cdot \alpha$ (approssimazione per angoli piccoli) e sostituisce nella (11)

$$n_1 \theta_1 + n_1 \frac{y}{R} = n_2 \theta_2 + n_2 \frac{y}{R}$$

ovvero

$$V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y = V_1 - \frac{n_2 - n_1}{R} y \quad (14)$$

Poiché la quota y rimane costante nella rifrazione, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Si noti che se $R \rightarrow \infty$, la superficie sferica diventa piano e (11)
la matrice (15) si riduce ad una matrice identica (come ~~già~~ ~~diver~~
~~rebbe~~ ~~essere~~).

Notiamo anche che tutte le matrici che abbiamo determinato ((9) e (15))
hanno determinante unitario.

Poiché il determinante del prodotto di matrici è pari al prodotto
dei determinanti, la matrice dei raggi di un qualunque sistema
ottico centrato ha determinante unitario. Quindi solo tre parametri
sono tra loro indipendenti, e il quarto può essere ottenuto dalla
conclusione sul determinante.

Notiamo infine che, come la matrice di una proiezione è caratterizzata
solo dalla "lunghezza ridotta" L/m , quella di una rifrazione è
caratterizzata solo dal "potere rifrattivo" della superficie

$$p = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

misurato in diottrie (che equivale a m^{-1} , e richiede quindi R in metri)

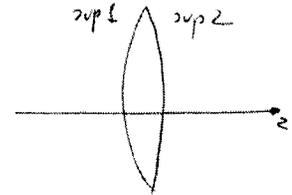
LENTI SOTTILI

(12)

Si chiama lente sottile il sistema ottico centrato costituito da due superfici sferiche con una spaziatura trascurabile tra loro.

Per determinare la matrice complessiva indichiamo con

P_1 e P_2 i poteri rifrattivi delle due superfici:



Si ha, potendo trascurare la propagazione,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1+P_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Si ha quindi una matrice simile alla singola rifrazione, ma il potere rifrattivo (che viene in genere detto anche potere focale) è ora

$$P_{tot} = P_1 + P_2 \quad (17)$$

Se la lente ha indice di rifrazione interno n (ed esterno 1) e i raggi di curvatura (con le solite convenzioni) sono R_1 e R_2 , si ha

$$P_{tot} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (18)$$

L'inverso di P_{tot}

$$f = \frac{1}{P_{tot}} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (19)$$

13

viene detta distanza focale della lente sottile, ed è l'unico parametro della lente. La matrice di una lente sottile è infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Si noti che questa matrice è indipendente dalla dimensione di cui si parla, ~~Quindi proprio~~ al contrario della matrice ~~che~~ di un sistema ottico generico.

Consideriamo come esempio una lente di vetro bi-convessa (vedi figura), con raggi di curvatura 4 cm e 6 cm.

Poiché il vetro ha $n = 1.6$ (valore medio) nulla



$$P_1 = \frac{1.6 - 1}{0.04} = 15 \text{ diottrie}$$

$$P_2 = \frac{1 - 1.6}{-0.06} = 10 \text{ diottrie}$$

(si noti il segno negativo di P_2)

per cui

$P_1 + P_2 = 25$ diottrie e $f = 4$ cm. La matrice è quindi

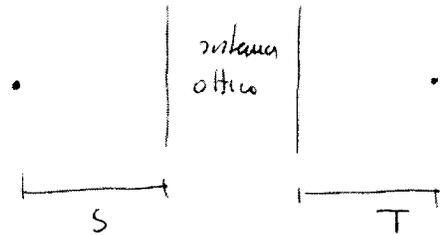
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -25 & 1 \end{pmatrix}$$

Per un sistema ottico di matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, i ~~raggi~~ parametri dei raggi sono dati da

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

• $\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sono i parametri su due piani che sono detti piano di ingresso e di uscita del sistema.

Poiché un sistema ottico viene in genere caratterizzato con oggetti e schemi posti a distanza variabile, è utile considerare la matrice del sistema ottico precedente per una traslazione dei ~~due~~ piani di ingresso e uscita. ~~Consideriamo~~ ^{calcoliamo} quindi la matrice dei raggi e risulta che una traslazione di S e T dei piani di ingresso e uscita, positiva e in allontanamento dal sistema



Risulta

$$\begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

~~in cui va notato il segno della prima~~

Sottraendo i prodotti matriciali si ha

(15)

$$\begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B+AS \\ C & D+CS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+CT & B+D T + AS + CTS \\ C & D+C \end{pmatrix}$$

(23)

In particolare se la traslazione è solo del piano di ingresso $T=0$ e

la matrice diventa $\begin{pmatrix} A & B+AS \\ C & D+CS \end{pmatrix}$, mentre se la traslazione è solo

del piano di uscita $S=0$ e la matrice diventa $\begin{pmatrix} A+CT & B+D T \\ C & D \end{pmatrix}$

di entrambi i piani. Si noti che una traslazione Y modifica i valori di A, B, D ma non quello di C , una traslazione del piano di ingresso lascia inalterato anche A e una del piano di uscita lascia invariato anche D .

Per una lente sottile, di focale f , si ha

$$\begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{T}{f} & T + S - \frac{TS}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{S}{f} \end{pmatrix} \quad (23)$$

I sistemi ottici utilizzati nella pratica hanno normalmente uno dei termini della matrice dei raggi pari a zero.

Vediamo quindi questi casi particolari

$$1) \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = B V_1 \quad \forall y_1 \quad (22)$$

Quindi tutti i raggi, che entrano con un certo angolo (e quindi sono paralleli tra loro) vengono convergati in uno stesso punto del piano di uscita.

La posizione del punto nel piano di uscita ~~depende~~ ^è moltiplicata proporzionale all'angolo di ingresso.



Un sistema con $A = 0$ focalizza quindi i raggi (paralleli) provenienti dall'infinito in un punto ^{Tale punto appartiene (al variare dell'angolo di ingresso) al piano di uscita che è} ~~appartiene~~ ^{delto} al (secondo) piano focale del sistema. Un esempio di un tale sistema è un telescopio.

($C \neq 0$)
Notiamo che qualunque sistema funziona da telescopio, a patto di scegliere opportunamente il piano focale. Infatti consideriamo un sistema con $A \neq 0$.

Una traslazione di T_0 del piano di uscita fornisce un nuovo sistema di matrice data da (23). ~~Per~~ Il valore di T che ~~produce~~ fornisce il secondo piano focale si ottiene da $A_2 = 0$ e vale

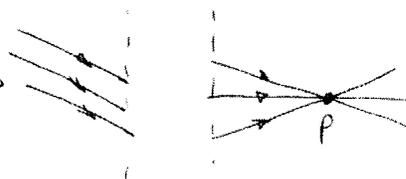
$$A + CT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{A}{C} \quad (25)$$

Il valore di B ~~fornisce~~ per un telescopio fornisce la retroscumbra angolo e posizione nel piano focale. (17)

Osservando il sistema oltre il piano focale si vede ~~una~~ un fascio ~~di~~ di raggi che diverge dal punto P .

Per Se eliminiamo il sistema ottico e posizioniamo un oggetto in P , vedremo lo stesso fascio divergente di raggi. ~~Per~~ Si esprime ciò

diciendo che il telescopio forma in P una immagine reale del fascio parallelo di raggi provenienti dall'infinito.



Una immagine reale è un punto in cui i raggi luminosi convergono. In tale punto può quindi essere posto uno schermo, una pellicola fotografica oppure un sensore elettronico, ottenendo così una mappa del fascio parallelo di raggi provenienti dall'infinito.

Per una lente sottile la (24) fornisce $T = f$, che garantisce il nome di distanza focale dato a f . La matrice complessiva (vedi (23)) vale

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \text{ e quindi risulta } y_2 = f V_2 = f \sec \theta_2$$

$$2) D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = C y_1 \quad \forall V_1 \quad (26)$$

(18)

Questo caso è il duale di quello precedente, in quanto tutti i raggi che partono da uno stesso punto del piano di ingresso vengono

trasformati in un fascio di raggi paralleli, che partono all'infinito.

D. conseguenza, il piano di ingresso viene detto (primo) piano focale del sistema. Un esempio di tale sistema è un proiettore luminoso:

una sorgente puntiforme nel piano focale produce un fascio di raggi divergenti che viene trasformato in un fascio di raggi paralleli. La direzione dei raggi di uscita può essere variata cambiando la posizione della sorgente nel piano focale.

Anche qui ogni sistema (con $C \neq 0$) funziona da proiettore, a patto di scegliere opportunamente il piano focale. In tutti i casi $D \neq 0$ possiamo trovare il piano di ingresso di S in modo che $D_t = 0$.

Dalla (23) questo richiede che

$$D + C S_t = 0 \quad \Rightarrow \quad S_t = -\frac{D}{C} \quad (27)$$

Per una lente sottile risulta $S = f$. I due piani focali distano quindi f dalla lente sottile stessa.

$$3) C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = D V_1 \quad V_1 \perp V_2 \quad (28)$$

Un sistema con $C=0$ viene detto afocale, in quanto trasforma raggi paralleli in raggi paralleli o in focalizzati.

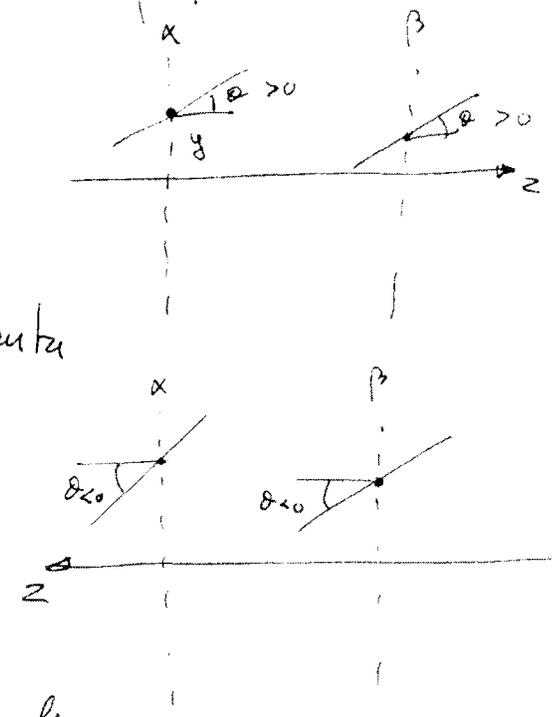
Per un tale sistema C resta nullo indipendentemente dalla posizione dei piani di ingresso e uscita. Il valore di D è l'ingrandimento angolare del sistema, rapporto tra gli angoli di ~~ingresso~~ uscita e di ingresso dei fasci di raggi paralleli.

4) Rimandando al prossimo paragrafo il caso (particolarmente importante) di $B=0$, notiamo che è possibile anche avere ~~due~~ ^{in particolare} due elementi nulli, purché posti sulla stessa diagonale. Se $A=D=0$ i due piani di ingresso e uscita sono entrambi piani focali.

Notiamo infine che è possibile scambiare ingresso e uscita in un sistema ottico. Sia $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice di un sistema

(vedi figura) in cui α è il piano di ingresso e β quello di uscita.

Se si decide di usare β come piano di ingresso e α come piano di uscita, i valori di y restano inalterati, mentre i valori di V cambiano segno (vedi figura in basso).



Per definizione di ~~la~~ matrice dei raggi del ^{caso iniziale}

$$\begin{pmatrix} y_\beta \\ -V_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\alpha \\ -V_\alpha \end{pmatrix} \quad (28a)$$

avendo usato per V (ovvero per θ) la definizione relativa al caso in basso nella figura.

Poiché il determinante è unitario possiamo ^{la matrice} moltiplicare ottenendo

$$\begin{pmatrix} y_\alpha \\ -V_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_\beta \\ -V_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\beta \\ -V_\beta \end{pmatrix} \quad (28b)$$

Il cambio di segno per V_α e V_β equivale a cambiare segno prima alla seconda riga e poi alla seconda colonna e segue la (28c), ovvero occorre solo scambiare A e D

$$\begin{pmatrix} y_\alpha \\ V_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\beta \\ V_\beta \end{pmatrix} \quad (28c)$$

IMAGING SYSTEMS

☺

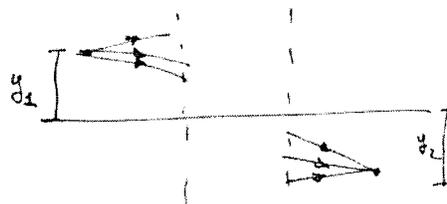
Il caso $B=0$ è di particolare importanza perché la relazione

$$y_2 = A y_1 \quad (29)$$

implica che un oggetto (ovvero un fascio di raggi divergenti partente da un punto qualunque del piano di ingresso) viene trasformato in un fascio di raggi divergenti da un punto del piano di uscita (ovvero in una immagine). Da qui il nome di

"imaging systems". Molti strumenti ottici (occhio umano, macchina fotografica, proiettori, microscopio...) appartengono a questa categoria.

Il rapporto $A = \frac{y_2}{y_1}$ (30)



è simmetrico con M viene detto ingrandimento del sistema, e può essere positivo o (come in figura) negativo, in quanto l'immagine di un oggetto alto y_1 è lo stesso oggetto alto y_2 e diritto, oppure capovolto.

I due piani di ingresso e uscita sono detti "piani coniugati", ed esiste una infinità di coppie di piani coniugati. Infatti per $B=0$ (anche se $B \neq 0$) si può sempre ottenere $B_E = 0$. Da (23) si ha infatti

$$B + DT + A'S + CTS = 0 \quad (31)$$

da cui

$$T = - \frac{B + A'S}{D + CS} \quad (32)$$

che fornisce la posizione della immagine di uscita al variare dell'oggetto di ingresso. Si noti che la (32) ha soluzioni indipendentemente dal valore di C (e di B). Infatti D e C non possono essere entrambi nulli in quanto il determinante deve essere unitario.

È invece possibile che $T \rightarrow \infty$, se $D + CS = 0$. Ma in tal caso risulterà $D_E = 0$ (e $B_E \neq 0$) e quindi si ricade nei casi già visti. Possiamo quindi dire che un fascio di raggi paralleli è un fascio che converge all'infinito, e quindi il piano focale è il piano coniugato del piano all'infinito.

Cominciamo in particolare una lente sottile, di focale f .

Da (32) risulta

$$T = - \frac{s}{1 - s/f} \quad (33)$$

e di conseguenza

$$M = A_t = 1 - T/f \quad (34)$$

ma anche

$$M = \frac{1}{D_t} = \left(1 - s/f\right)^{-1} \quad (35)$$

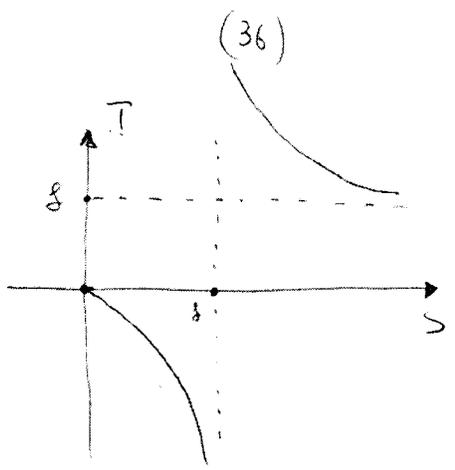
in quanto, se $B_t = 0$, con formula da (33), il determinante è $A_t D_t = 1$

Da (33) e (35) segue anche $T = - M s$. ovvero

$$M = - \frac{T}{s} \quad (36)$$

Il grafico di T al variare di s , (per $f > 0$) (positivo, ovvero ~~al~~ sinistra della lente) è particolarmente interessante.

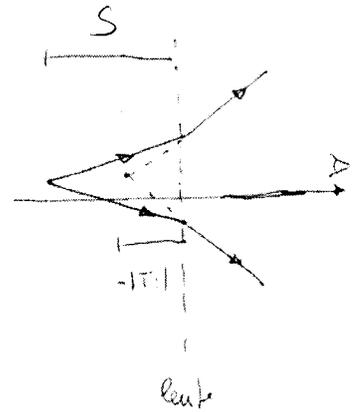
Per $s > f$ il valore di T decresce sino al valore f (equindi risulta sempre maggiore di f)



Quindi oggetto e immagine devono essere più lontani della distanza 23
focale.

Se $S < f$, invece, si ha $T < 0$.

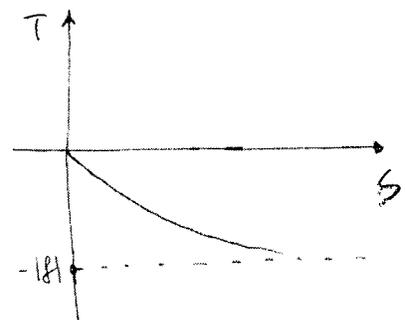
Quindi i raggi divergono a destra
della lente partono da un punto a
sinistra della lente stessa.



Un osservatore a destra vede quindi ancora
una immagine dell'oggetto, ma posta prima della

lente. Nel punto della immagine non ha alcuna ~~intersezione~~ intersezione di
raggi: tale immagine è detta virtuale e non può essere usata
per un rasoio (o pellicola fotosensibile). Il caso più comune di
immagine virtuale è quella prodotta da uno specchio piano.

Per una lente con $f < 0$, invece, risulta sempre $T < 0$, ovvero
l'immagine è sempre virtuale



Per quanto riguarda M , si vede che $M < 0$ per una immagine reale (che è quindi capovolta) e $M > 0$ per una immagine virtuale (che è quindi sempre dritta).

In particolare per una immagine reale ~~si~~ risulta $|M| > 1$

* $|1 - \frac{T}{f}| = \frac{T}{f} - 1 > 1$ ovvero $T > 2f$ e $|M| < 1$ e

$f < T < 2f$. Per una immagine virtuale con $f > 0$ (lente convergenti)

$M = 1 + \frac{|T|}{f} > 1$ sempre, mentre per $f < 0$ (lente divergenti)

$M = 1 - |\frac{T}{f}| \in (0, 1)$

1 LENTE SPESSA

Calcoliamo la matrice dei raggi di una lente spessa, ovvero di una lente in cui non sia possibile trascurare la propagazione interna tra le due rifrazioni.

In analogia al caso di lente sottile, indichiamo con P_1 e P_2 i poteri rifrattivi delle due superfici, e sia L_r la distanza ridotta tra le due superfici sferiche.

La matrice complessiva dei raggi vale

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & L_r \\ -P_2 & 1 - P_2 L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - P_1 L_r & L_r \\ -P_1 - P_2 + P_1 P_2 L_r & 1 - P_2 L_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da questa matrice è possibile valutare quantitativamente la ipotesi di lente sottile. Per prima cosa si vede che tutti gli elementi della matrice, ad eccezione dell'elemento (1,2), possono essere approssimati a quelli della matrice di una lente sottile se

$$|P_1|L_r \ll 1 \quad \text{e} \quad |P_2|L_r \ll 1 \quad (1)$$

Per quanto riguarda l'elemento (1,2) della matrice, pari a L_r , la valutazione se possa essere trascurato va fatta su y_2 . Si ha infatti, per lente spessa

$$y_2 = (1 - P_1 L_r)y_1 + L_r V_1$$

L'espressione valida per una lente sottile: $y_2 = y_1$ si ottiene se il valore massimo di $L_r V_1$ risulta trascurabile rispetto al valore massimo di y_1 e y_2 .

Poniamo ancora

$$\frac{1}{f} = P_1 + P_2$$

I piani focali di una lente spessa si ottengono imponendo $A_t = 0$ e $D_t = 0$. Sviluppando si ottiene

$$(1 - P_1 L_r) + \left[-\frac{1}{f} + P_1 P_2 L_r \right] T = 0 \quad \implies \quad T = f \frac{1 - P_1 L_r}{1 - P_1 P_2 f L_r}$$

e analogamente per l'altro lato.

Sommando e sottraendo f alla espressione di T si ottiene poi

$$T = f - P_1 f L_r \frac{1 - P_2 L_r}{1 - P_1 P_2 f L_r}$$

I piani focali sono quindi spostati rispetto a quelli di una lente sottile, e i due spostamenti sono diversi. In particolare sono trascurabili (lente sottile) se oltre alle condizioni (1) vale anche

$$|P_1 P_2 f| L_r \ll 1 \quad (2)$$

che può non essere verificata se P_1 e P_2 sono di segno opposto e prossimi.

Si dicono piani cardinali di un sistema ottico (con $C \neq 0$)

- a) i due piani focali, già caratterizzati
- b) i due piani principali, ai quali corrisponde un ingrandimento lineare unitario
- c) i due piani nodali, ai quali corrisponde un ingrandimento angolare unitario.

Per maggiore generalità, annunciamo due diversi indici di rifrazione a sinistra (n_1) e destra (n_2) del sistema ottico

Per calcolare i piani principali partiamo dalla eq. (23) e dalla (32). L'ingrandimento lineare vale

$$M = A_T = A + CT_0 \quad (37)$$

col vincolo che T_0 sia dato dalla (32).

Dalla (37), ^{con $M=1$,} si vede che il secondo piano principale è in

$$T_0^{(P)} = \frac{1 - A}{C} \quad (38)$$

(la distanza fisica è ovviamente $n_2 T_0^{(P)}$), mentre il primo piano

principale ~~se~~ si ottiene moltiplicando la (31) moltiplicata a D_0

$$D_0 = - \frac{B + D T_0}{A + C T_0} \quad (32a)$$

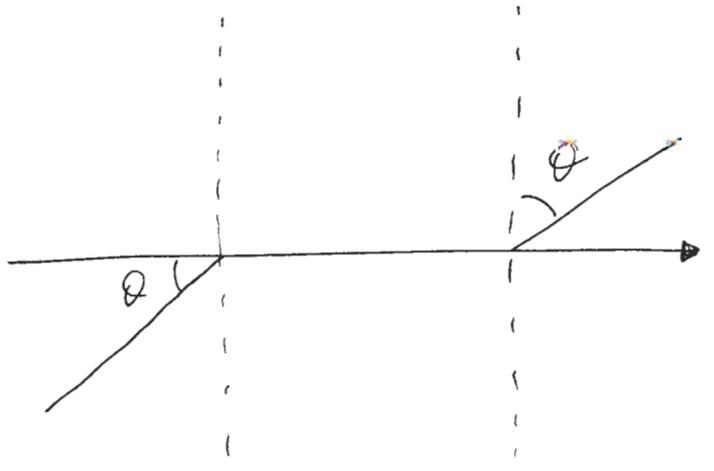
e sostituendo $T_0^{(P)}$:

$$D_0^{(P)} = - \frac{B + D \frac{1-A}{C}}{A + C \frac{1-A}{C}} = - \left[B + \frac{D}{C} (1-A) \right]$$
$$= - \frac{1}{C} (+BC - AD + D) = \frac{D-1}{C} \quad (39)$$

ricordando che $AD - BC = 1$. La posizione fisica è ovviamente $n_2 D_0^{(P)}$

Per quanto riguarda i piani nodali, si richiede che un raggio che attraversa il ^{primo} piano nodale nella intersezione con l'asse ottico con un angolo θ , attraversi il secondo piano nodale sempre all'intersezione con l'asse ottico e formando lo stesso angolo θ ($\neq \theta$)

In questa definizione il termine "raggio" sta potenzialmente anche per il suo prolungamento.



Partiamo ancora dalla (23). Utilizzando la matrice $\begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix}$ (27) relativa agli spostamenti $D_0^{(N)}$ e $T_0^{(N)}$ fino ai piani nodali, si deve avere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \vartheta \end{pmatrix} \quad (40)$$

Segue allora $B_t = 0$ e $n_2 \vartheta = D_t n_1 \vartheta$

$B_t = 0$ implica che $D_0^{(N)}$ e $T_0^{(N)}$ sono legati dalla (32) (ovvero i due piani nodali sono piani coniugati). L'altra condizione fornisce invece

$$n_2 = D_t n_1 = n_1 \left(D + C D_0^{(N)} \right)$$

da cui

$$D_0^{(N)} = \left(\frac{n_2}{n_1} - D \right) \frac{1}{C} = \frac{n_2 - n_1 D}{n_1 C} \quad (41)$$

e sostituendo nella (32)

$$T_0^{(N)} = - \frac{B + A D_0^{(N)}}{D + C D_0^{(N)}} = - \frac{n_1 B C + A (n_2 - n_1 D)}{n_1 D C + C (n_2 - n_1 D)} = \frac{n_1 - n_2 A}{n_2 C} \quad (42)$$

Anche qui, ovviamente, le posizioni fisiche saranno $n_1 D_0^{(N)}$ e $n_2 T_0^{(N)}$

1 LENTE A IMMERSIONE

Consideriamo ora una superficie sferica di raggio R , in cui l'oggetto è all'interno (dal lato concavo), in un mezzo con indice di rifrazione n . Se l'oggetto è posto a distanza R/n dal centro della superficie sferica, si ha una immagine puntiforme dell'oggetto anche considerando raggi non parassiali.

La geometria è quella di Fig. 1. Dalla legge di Snell

$$n_2 \sin \phi_2 = \sin \phi_1 \quad (1)$$

e dal triangolo della Fig. 1 segue, per il teorema dei seni,

$$\frac{R}{n} \frac{1}{\sin \phi_2} = R \frac{1}{\sin \theta_2}$$

Utilizzando la legge di Snell si ottiene

$$\frac{R}{\sin \phi_1} = \frac{R}{\sin \theta_2} \implies \theta_2 = \phi_1 \quad (2)$$

D'altra parte, analogamente a quanto già visto, risulta $\phi_2 = \alpha - \theta_2$ e $\phi_1 = \alpha - \theta_1$, e uguagliando le due espressioni di α

$$\phi_2 + \theta_2 = \phi_1 + \theta_1 = \theta_2 + \theta_1 \implies \phi_2 = \theta_1 \quad (3)$$

L'immagine dell'oggetto è virtuale e si trova a distanza X dal vertice della superficie rifrangente.

Utilizzando ancora il teorema dei seni nella Fig. 2 segue

$$\frac{X - R}{\sin \phi_1} = \frac{R}{\sin \theta_1} = \frac{R}{\sin \phi_2} = \frac{nR}{\sin \phi_1}$$

da cui segue

$$X = (n + 1)R \quad (4)$$

indipendentemente dalla direzione θ_2 di uscita dei raggi dall'oggetto.

La struttura considerata è quindi priva di aberrazioni. Ovviamente la necessità di porre l'oggetto all'interno della struttura dielettrica costringe a realizzare la lente con un mezzo fluido (normalmente olio) e quindi questa prende il nome di lente ad immersione (o ad immersione in olio).

In genere la lente ad immersione è la prima lente di un sistema ottico. I raggi entrano nel resto del sistema con un angolo θ_1 che può essere calcolato facilmente se si assume che il

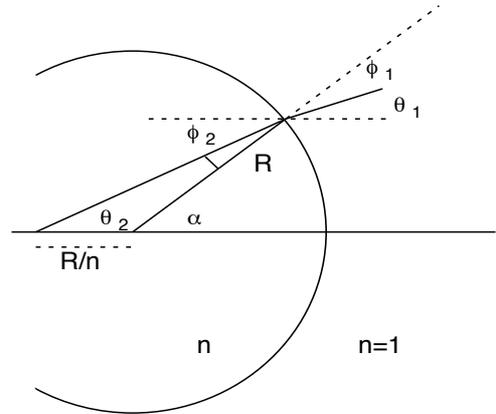


Fig 1

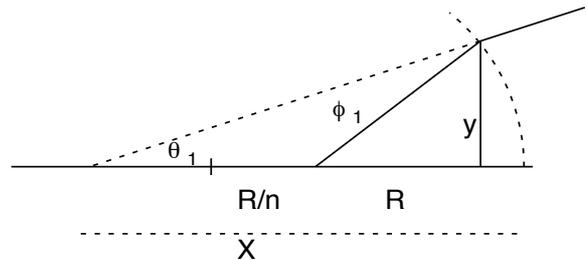


Fig 2

punto di incidenza sia posto verticalmente sul vertice della superficie. Segue allora per la quota del punto di incidenza

$$y = X \tan \theta_1 = \left(R + \frac{R}{n} \right) \tan \theta_2$$

da cui

$$\tan \theta_1 = \left(\frac{n+1}{n} R \right) \frac{1}{(n+1)R} \tan \theta_2 = \frac{1}{n} \tan \theta_2 \quad (5)$$

Quindi l'angolo di uscita può essere notevolmente più piccolo di quello di ingresso, e pertanto l'ipotesi di raggi parassiali è più accurata nel resto del sistema ottico se la prima lente è ad immersione.

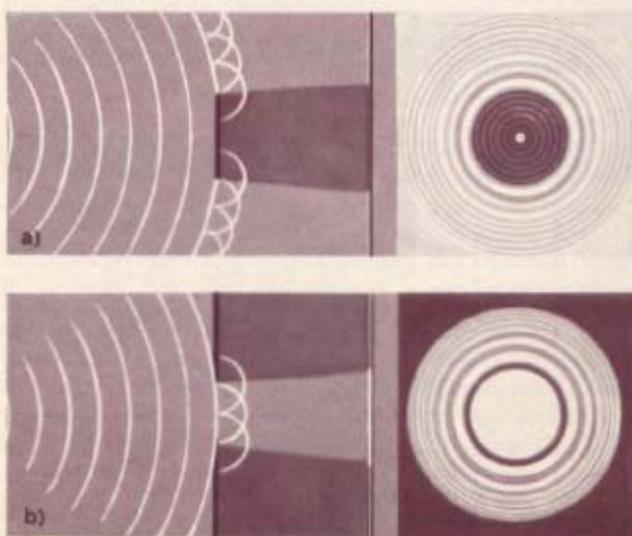
DIFFRAZIONE DELLE ONDE LUMINOSE

9-66. Generalità Gli effetti di illuminazione di uno schermo, sul quale arrivano radiazioni di data intensità e frequenza, si complicano quando la libera propagazione delle onde luminose, emesse da sorgenti puntiformi o filiformi, viene parzialmente impedita dalla presenza di corpi opachi, oppure

Fig. 9-115 Effetti della diffrazione -

a) Propagazione delle onde luminose parzialmente impedita da un dischetto opaco. Su uno schermo, se la sorgente è puntiforme, al posto di una nitida ombra circolare si osserva un'ombra solcata da frange oscure concentriche e circondata da frange chiare di diffrazione. Talvolta le onde diffratte possono illuminare il centro dell'ombra.

b) Propagazione delle onde luminose circonscritte da un forellino circolare in un diaframma opaco. Sullo schermo, al posto di un cerchietto d'illuminazione, un cerchio chiaro allargato e circondato da frange concentriche di diffrazione.



limitata e circonscritta da aperture in diaframmi opachi (fori, fenditure, ecc.). Quando corpi opachi o aperture assumono dimensioni piccolissime, confrontabili con le lunghezze d'onda delle radiazioni, l'esperienza dimostra che le

illuminazioni dello schermo assumono aspetti discordanti con le previsioni dell'ottica geometrica (fig. 9-115).

Nelle propagazioni parzialmente impedita, la luce s'inflette contornando gli ostacoli: le onde che invadono lo spazio previsto geometricamente in ombra (*onde diffratte*), potendo interferire tra loro, danno origine a frange chiare e oscure, chiamate *frange di diffrazione*. Tali fenomeni, interpretabili stabilendo una redistribuzione delle intensità e delle fasi delle onde avanzanti al di là dell'ostacolo, si dicono **fenomeni di diffrazione**, e si possono prevedere e riscontrare in tutte le forme di propagazione ondulatoria, cioè nelle onde elastiche, acustiche, luminose, elettromagnetiche, ecc.

I fenomeni di diffrazione ottica sono svariati, potendo mutare la sorgente (dimensioni, forma), i tipi di radiazioni, gli ostacoli opachi, la forma, il numero e la distribuzione dei fori o delle fenditure nei diaframmi, ecc.

L'ottica geometrica, nelle ipotesi in cui valga la matrice dei raggi (ottica parassiale) prevede una immagine infinitesima. In realtà, ~~con~~ $\lambda > 0$, ogni immagine ha estensione finita, a causa della diffrazione.

Consideriamo il caso di una immagine che si forma nel punto P, con i raggi che passano attraverso lo schermo forato Σ , posto a distanza T_0 . Sia A_2 il raggio del foro.

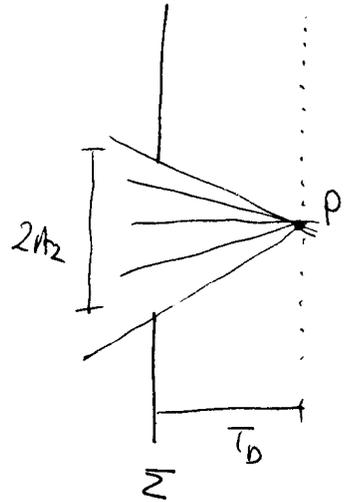


Fig. 1

Al variare della posizione di un rinvio nel piano (tratteggiato) passanti per P si dovrebbe osservare una luminosità nulla salvo che nel punto P. In realtà l'andamento della luminosità L è quello a lato.

La larghezza tra gli zeri della zona illuminata vale $2\Delta y_2$ con

$$\Delta y_2 = 1.22 \frac{\lambda T_0}{2A_2}$$

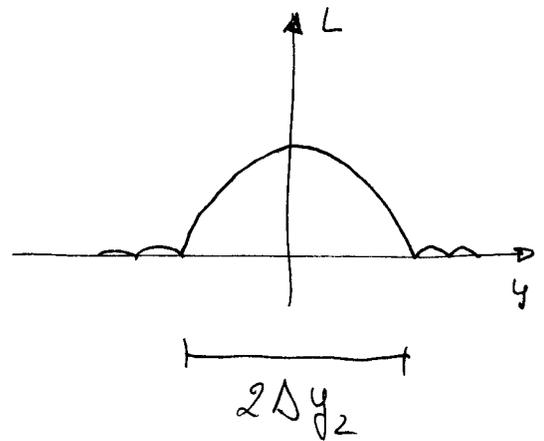


Fig. 2

e quindi si riduce al crescere di A_2 o al ridursi di λ . La ~~zona~~ ^(convensionalmente) larghezza della immagine di una sorgente puntiforme è pari a Δy_2 (vedi Fig. 2).

Se abbiamo due oggetti, con immagini geometriche P_1 e P_2 , le loro immagini sono parzialmente sovrapposte (Fig 3).

Si conosce (criterio di Lord Rayleigh) che due oggetti sono distinguibili se l'immagine di uno è nel primo nullo dell'altro, ovvero a distanza Δy_2 .

La risoluzione in uscita ~~del sistema~~ risulta quindi pari a Δy_2 .

Se l'immagine è ottenuta con un imaging system, allora le due sorgenti distano ^{di P_1 e P_2}

$$\Delta y_1 = \frac{1}{M} \Delta y_2$$

che è la risoluzione in ingresso del sistema.

Per sistemi telescopici⁽¹⁾, ~~la risoluzione~~ invece, i punti P_1 e P_2 ~~sono~~ sono le immagini di due fasci di raggi paralleli. Si definisce allora una risoluzione angolare in ingresso $\Delta \theta_1$ data da

$$\Delta \theta_1 = \frac{1}{n_1} \Delta V_1 = \frac{1}{n_1} \left[\frac{1}{B} \Delta y_2 \right]$$

⁽¹⁾ Si sta assumendo che P_1 e P_2 siano nel piano focale, ovvero che $\begin{pmatrix} AB \\ c 0 \end{pmatrix}$ sia qca' un sistema telescopico ($H=0$). Altrimenti occorre considerare $\Delta V_1 = \frac{1}{B_c} \Delta y_2$

La risoluzione di un sistema ottico (limitata dalla diffrazione) dipende ~~dalla apertura~~ da A_2 .

Si nota immediatamente (vedi Fig 1) che è possibile spostare Σ e, nel contempo, si varia anche A_2 in modo che A_2/T_D sia costante.

~~Se lo schermo è~~ ~~luminoso~~ in un sistema ottico può essere anche più di uno schermo (sono schermi anche i bordi delle lenti) in posizioni differenti.

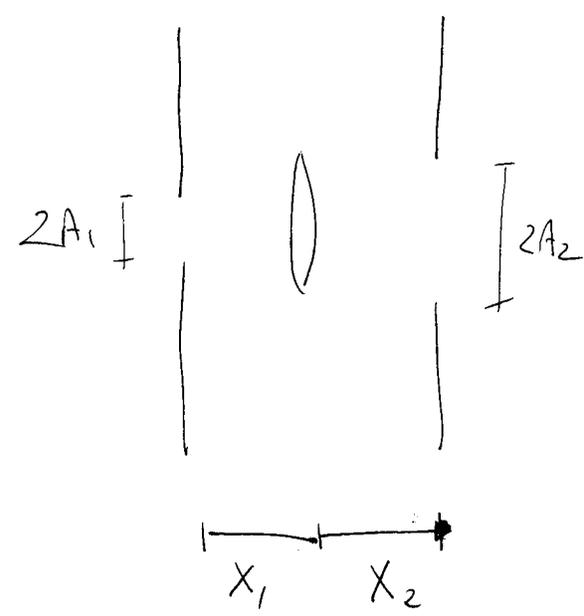
Per ogni diaframma possiamo definire una pupilla di uscita, ovvero quella apertura geometrica (circolare) che, posta oltre il sistema ottico, viene attraversata da tutti e solo i raggi che attraversano il diaframma. In altri termini la pupilla di uscita è l'immagine della apertura del diaframma ottenuta dalla parte di sistema ottico che va dal diaframma all'uscita. Nota ~~la~~ il diametro della pupilla di uscita, si ottiene la risoluzione in uscita.⁽²⁾

Si noti che la pupilla di uscita va nel piano coniugato al diaframma, tuttavia può poi essere spostata senza problemi.

(2) Infatti aggiungendo uno schermo con apertura pari alla pupilla, e eliminando il diaframma iniziale, i raggi che arrivano alla immagine restano esattamente gli stessi.

Questo spostamento è necessario se si debbono confrontare più diaframmi per stabilire quale limita l'apertura totale.

Si consideri ad esempio una lente sottile di focale f con due diaframmi di raggi A_1 e A_2



La pupilla di uscita corrispondente al primo diaframma si trova a

$$T_x = \frac{X_1}{1 - X_1/f} \quad \text{a destra della lente.}$$

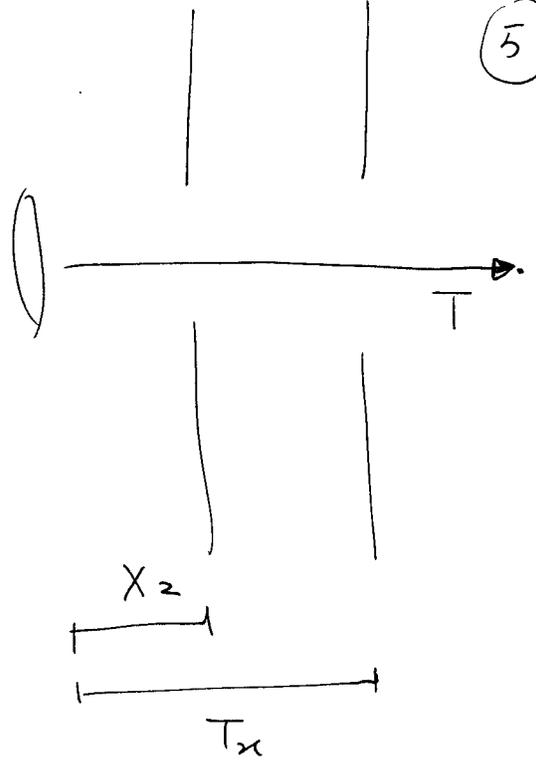
ed ha un raggio pari a $M_x A_1$, essendo M_x l'ingrandimento corrispondente

$$M_x = 1 - \frac{T_x}{f}$$

La situazione è quindi diventata quella di una lente con due diaframmi a destra; ~~posti~~

	distanza	apertura
1° diaframma (reale)	X_2	A_2
2° diaframma (frescatto)	T_x	$M_x A_1$

Il raggio di un frammento può essere spostato nel punto (in modo da confrontarli) se è nota la posizione T della immagine che si vuole realizzare.



Risulta infatti, se A_T è il raggio del frammento dopo la traslazione

$$\frac{A_T}{T - X_2} = \frac{M_x A_x}{T - T_x}$$

da cui

$$A_T = (M_x A_x) \frac{T - X_2}{T - T_x}$$

1 ABERRAZIONE CROMATICA

Nel calcolare i parametri delle matrici dei raggi, si assume l'indice di rifrazione costante. In realtà l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza (o, più utilmente, dalla lunghezza d'onda λ), fenomeno che viene detto *dispersione*.

Vogliamo valutare l'effetto della dispersione sul comportamento dei sistemi ottici centrati, e lo faremo solo sul sistema più semplice, ovvero una lente sottile, con raggi di curvatura pari rispettivamente a $\pm R$.

La lunghezza focale della lente dipenderà dalla lunghezza d'onda ed è pari a

$$f(\lambda) = \frac{2}{R} [n(\lambda) - 1]$$

se $n(\lambda)$ è l'indice di rifrazione, per ipotesi variabile.

Prendiamo un fascio di raggi paralleli, e uno schermo a distanza pari a T_V , calcolata in modo che, per la luce verde, con lunghezza d'onda λ_V , i raggi convergano esattamente su tale schermo (Quindi $T_V = f(\lambda_V)$).

La matrice dei raggi per una lunghezza d'onda generica, con l'uscita sullo schermo, vale

$$\begin{bmatrix} 1 & T_V \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f(\lambda)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T_V}{f(\lambda)} & T_V \\ -\frac{1}{f(\lambda)} & 1 \end{bmatrix}$$

Per ipotesi $V_1 = 0$, e quindi la posizione del raggio sul piano di uscita vale

$$y_2 = \left[1 - \frac{T_V}{f(\lambda)}\right] y_1 + [T_V] V_1 = \left[1 - \frac{T_V}{f(\lambda)}\right] y_1$$

Se la lunghezza d'onda è quella del verde $\lambda_V = 600 \text{ nm}$, allora (Fig. 1) la quantità in parentesi quadra vale 0 e tutti i raggi (parassiali) passano per $y_2 = 0$, formando qui una immagine.

A una lunghezza d'onda diversa, ad esempio nel rosso $\lambda_R = 800 \text{ nm}$, si ha invece (Fig. 2, con variazioni esagerate volutamente)

$$y_2 = \left[1 - \frac{T_V}{f(\lambda_R)}\right] y_1$$

Quindi nel piano di uscita non si ha più una immagine puntiforme ma un dischetto (ovvero una immagine sfocata). L'allargamento della immagine dovuta alla variazione di n con λ ¹ prende il nome di aberrazione cromatica.

La dimensione della immagine in uscita è ovviamente proporzionale alla larghezza della pupilla di ingresso, ovvero al massimo valore di y_1 . Conviene allora considerare la quantità

$$\frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{T_V}{f(\lambda_R)} = \frac{f(\lambda_R) - f(\lambda_V)}{f(\lambda_R)} = \frac{n(\lambda_R) - n(\lambda_V)}{n(\lambda_R)}$$

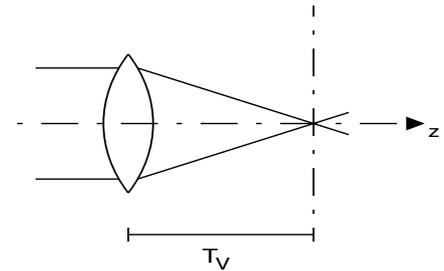


Fig 1: Lunghezza d'onda del verde λ_V ;

¹ Si noti che questa è una delle varie cause indipendenti che producono allargamento delle immagini puntiformi

usando l'espressione di $f(\lambda)$.

Approssimando la variazione di n con la sua derivata segue

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{n(\lambda_R)} \left[\frac{dn}{d\lambda} \right]_{\lambda_R} (\lambda_R - \lambda_V)$$

La relazione precedente mostra che con una lente singola non è possibile evitare l'aberrazione cromatica. Per ridurla è necessario utilizzare sistemi di più lenti, realizzate con materiali diversi e che abbiano derivate $dn/d\lambda$ con segno opposto.

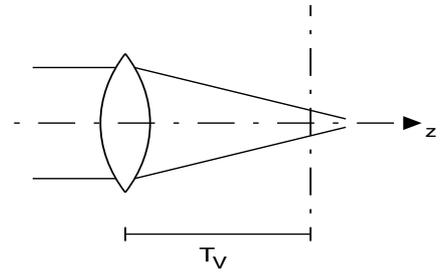


Fig 2: Lunghezza d'onda del rosso λ_R ;

Il bulbo oculare (fig. 9-78) è costituito da un insieme di mezzi trasparenti distinti, racchiusi in un involucro formato da membrane chiamate *tuniche del bulbo*: quella esterna, grossa e fibrosa, bianca nella faccia esterna, è detta **sclera**; l'intermedia è la *tunica vascolare*, percorsa dai vasi sanguigni che alimentano l'occhio, e, nella parte che riveste posteriormente il bulbo, è detta **coroide**; la terza, che riveste e tappezza la coroide, è costituita dalle suddivisioni ed espansioni del nervo ottico, contenenti gli elementi sensibili alle radiazioni luminose (*foto-recettori*), e viene detta **retina**.

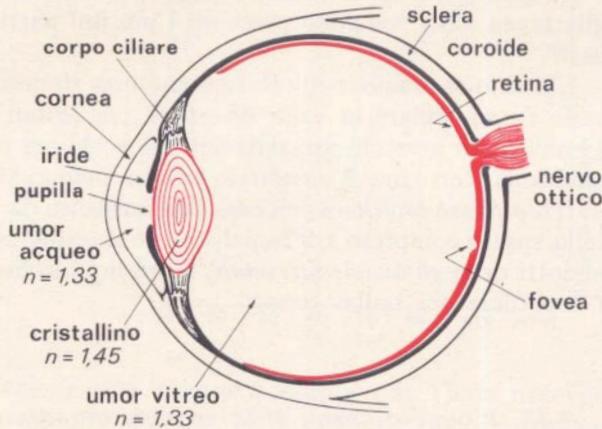


Fig. 9-78 **Le parti dell'occhio** - Un raggio di luce, proveniente da sinistra orizzontalmente da un punto P, incontra e attraversa una serie di mezzi trasparenti (successivamente: cornea, umor acqueo, cristallino, umor vitreo), i quali si comportano come diottri sferici che racchiudono una lente convergente flessibile, il cristallino, destinati a formare l'immagine nitida di P sulla retina. Questa funziona da schermo sensibile, in cui vengono stimulate le terminazioni del nervo ottico (*foto-recettori*).

Nella parte anteriore del bulbo oculare, dove esso presenta una rigonfiatura circolare, la sclera e la coroide si alterano, differenziandosi: la sclera, opaca in ogni altra parte, diventa trasparente e prende il nome di **cornea**, mentre la coroide forma dapprima il **corpo ciliare** e poi un disco opaco, detto **iride** perché variamente colorato nei diversi individui, con un foro circolare al centro, detto *foro pupillare* o **pupilla**.

L'iride è simile a un diaframma regolabile, essendo contrattile in modo da far variare il diametro della pupilla (tra circa 2 mm e 9 mm).

Il nucleo del bulbo oculare è formato da tre distinti corpi trasparentissimi: il primo, compreso tra la cornea e l'iride, è un liquido con lo stesso indice di rifrazione dell'acqua, detto **umor acqueo**; il secondo, situato dalla parte in cui si trova la retina, è gelatinoso, viene detto **umor vitreo**, ed ha lo stesso indice di rifrazione del primo; il terzo, posto tra i primi due, ha la forma di lente biconvessa con facce di curvatura diversa, ed è il **cristallino**: costituito da strati sovrapposti di sostanza elastica trasparente, con un indice di rifrazione medio prossimo a quello del vetro leggero, esso si comporta come una lente flessibile di circa 60 diottrie.

Il cristallino è sospeso in un complesso anulare di muscoli radiali fissati al corpo ciliare, alla base dell'iride, capaci con le loro contrazioni di modificarne la curvatura, in modo da accrescere il suo potere diottrico fino a un massimo di una decina di diottrie (fig. 9-78).

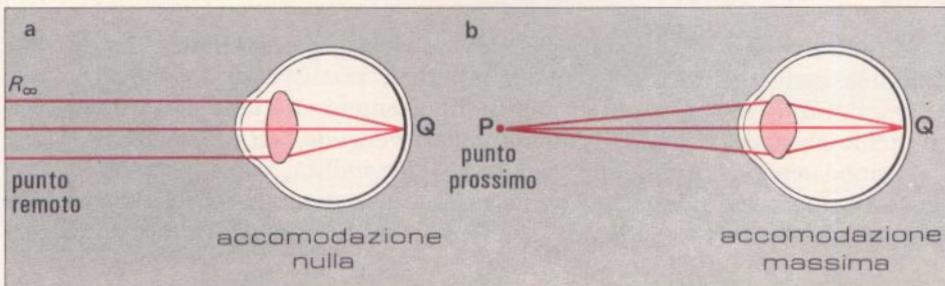
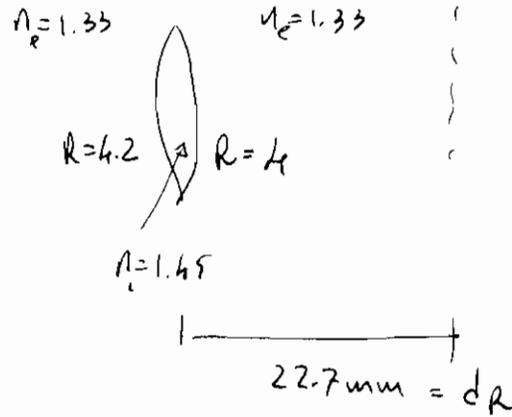


Fig. 9-79 **L'accomodazione** -

a) Nell'occhio normale il cristallino, nella condizione di riposo, rende nitide sulla retina le immagini di punti lontanissimi.

b) Nel massimo sforzo di accomodazione il cristallino viene incurvato, aumentando la sua convergenza, in modo da rendere nitide sulla retina le immagini di oggetti vicinissimi.

A) In condizioni di riposo



Matrice dei raggi $C = -58.57 \text{ m}^{-1}$

Lo schermo è nel piano focale $\frac{d_R}{n_e} = -\frac{1}{C}$

La massima curvatura si ha nel neonato e vale circa 3 mm . Nel caso

$C' = -70 \text{ m}^{-1}$ e il punto vicino è a circa 9 cm

con l'età la massima curvatura diminuisce. Fino a circa 3.6 mm si ha un occhio normale (punto vicino a 20 cm), poi inizia la presbiopia.

B) Occhio miope

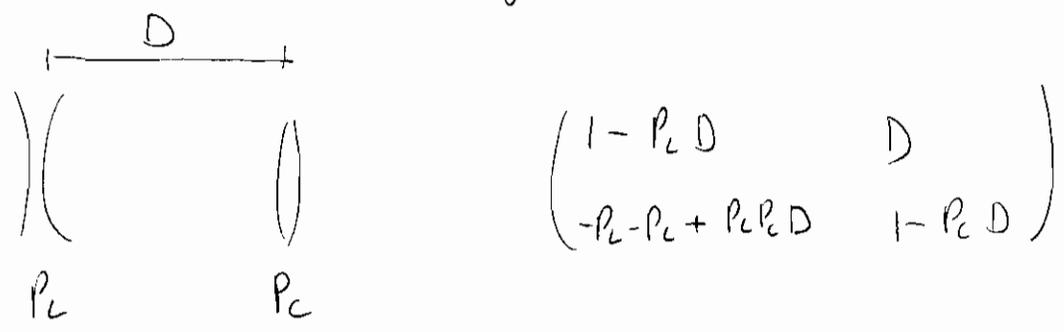
Retina a $d_R + \Delta$.

$$\text{Punto coniugato } D_0 = -\frac{(d_R + \Delta) \frac{1}{n_e}}{1 + C(d_R + \Delta) \frac{1}{n_e}} \approx -\frac{d_R/n_e}{1 - 1 + \frac{C\Delta}{n_e}} = \frac{n_e}{C^2 \Delta}$$

$$\text{Se } \Delta = 0.5 \text{ mm} \quad D_0 = 80 \text{ cm}$$

$$\Delta = 2 \text{ mm} \quad D_0 = 20 \text{ cm}$$

La miopia si corregge con lenti divergenti



La lente esterna deve portare il secondo piano focale in $d_R + \Delta$

$$-\frac{1 - P_L D}{-P_L - P_C + P_L P_C D} = (d_R + \Delta) / n_e$$

Ma $\frac{P_C d_e}{n_e} = +1$ da cui $-1 + P_L D = -\frac{P_L d_R}{n_e} - \frac{P_C \Delta}{n_e} \Rightarrow 1 - \frac{P_C \Delta}{n_e} + \frac{P_L D}{n_e} [n_e + P_C \Delta]$

ovvero $-\frac{P_L (d_R + \Delta)}{n_e} - \frac{P_C \Delta}{n_e} + \frac{P_L P_C D \Delta}{n_e} = 0$

da cui $P_L = \frac{P_C \Delta}{P_C D \Delta - (d_R + \Delta)} \approx \frac{\Delta}{D \Delta - \frac{d_R}{P_C}}$

Per gli occhiali normali $P_L \approx -\frac{P_C \Delta}{d_R} = -\frac{P_C^2 \Delta}{n_e} = \frac{1}{D_0}$

c) Occhio ipermetropo

Vede miopia ma con $\Delta < 0$. Si vedono raggi divergenti

D) Presbiopia

(3)

$R_e = 3.9$ mm punto vicino a 45 cm

Passare da C_N a $C_N + \Delta C$ sposta in fuori il punto vicino D_{op}

La cond. di piani coniugati è

$$\frac{dR}{n_e} + D_{op} + (C_N + \Delta C) \frac{dR}{n_e} D_{op} = 0$$

da cui

$$D_{op} = - \frac{dR/n_e}{\frac{dR}{n_e} (C_N + \Delta C) + 1}$$

La correzione richiede una lente convergente: $P_L > 0$

In prima approssimazione si può richiedere che

$$-P_L + (C_N + \Delta C) + P_L (C_N + \Delta C) \cdot D = + C_N$$

da cui

$$P_L = \frac{\Delta C}{1 + (C_N + \Delta C) D}$$

che (al contrario della miopia) dipende da D

Nel caso $R_e = 3.9$ $\Delta C = 2.56$ e $P_L = \frac{2.56}{1 - 60.7 D}$

ovvero $P_L = 2.9 \text{ m}^{-1}$