

# Appunti di Bioingegneria Elettromagnetica

Prof. G. Mazzearella

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Note del corso .

## 1 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono date come postulati:

$$\oint_c \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1)$$

$$\oint_c \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2)$$

$$\oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.3)$$

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1.4)$$

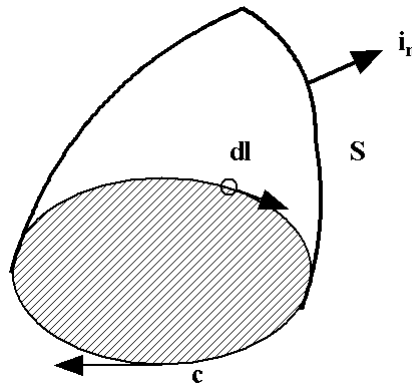


Figure 1: Superficie e contorno

dove  $\mathbf{e}$  è il vettore campo elettrico e si misura in  $[\frac{V}{m}]$ ,  $\mathbf{b}$  è il vettore induzione magnetica  $[\frac{Wb}{m^2}]$ ,  $\mathbf{h}$  è il vettore intensità magnetica  $[\frac{A}{m}]$ ,  $\mathbf{I}$  è la corrente elettrica  $[A]$ ,  $\mathbf{d}$  è il vettore induzione elettrica  $[\frac{C}{m^2}]$  e  $\mathbf{Q}$  è la carica elettrica  $[C]$ . In particolare

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.a)$$

$$Q = \int_V \rho dV \quad (1.4.a)$$

e quindi  $\mathbf{J}$  e  $\rho$  sono dette densità di carica e di corrente e si misurano rispettivamente in  $[\frac{C}{m^3}]$  e  $[\frac{A}{m^2}]$  (la corrente è scelta positiva in direzione di  $\mathbf{i}_n$ ). La variazione del flusso del campo magnetico  $-\frac{d\Phi_b}{dt}$  indica che un campo elettrico si genera se  $\Phi_b$  varia, qualunque sia la carica: variazione temporale delle sorgenti, moto delle sorgenti o di  $c$ , deformazione o rotazione di  $c$ . Se  $c$  e  $S$  sono fissate allora  $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{d}{dt} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}$ . Nelle

ultime due equazioni  $S$  è una superficie qualunque che si appoggia su  $c$ . Consideriamo allora due superfici  $S_1, S_2$  generiche.

Si ha ovviamente

$$\frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S}$$

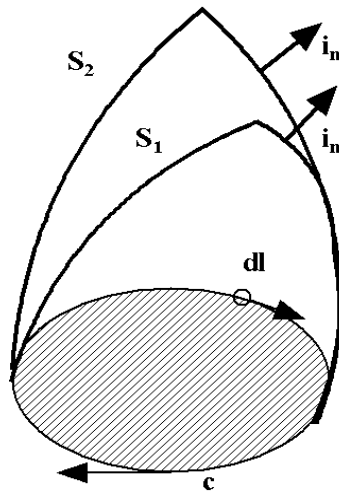


Figure 2: Unione  $S_1$  e  $S_2$

dove  $S$  è la unione di  $S_1, S_2$  ( ma ora con la normale rovesciata). Quindi il flusso di  $\mathbf{b}$  è costante. La 3<sup>a</sup> equazione è quindi essenzialmente una condizione iniziale. Invece

$$\frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

da cui ricaviamo l' Equazione di continuità

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1.2.b)$$

Inoltre si ottiene che

$$\oint_S (\mathbf{J} + \frac{d}{dt} \mathbf{d}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(nel caso statico è nullo il flusso solo di  $\mathbf{J}$ ).

## 2 Forza di Lorentz

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{J} \times \mathbf{b} \quad (2.1)$$

$\mathbf{f}$  è la densità di forza. Nota  $\mathbf{f}$  si può ottenere risultante e momento risultante. Ma la corrente è costituita da cariche in moto :  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  ( campo di velocità, variabile con  $\mathbf{r}$  ) per cui

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{b} \quad (2.1.a)$$

Per una carica  $\rho = q \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)], \mathbf{r}_0(t)$  la traiettoria  $\Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{F} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$  con  $\mathbf{F} = q \text{ textbfe} + q \mathbf{v} \times \mathbf{b}$  la forza della carica risultante ( mentre il momento risultante è nullo).

### 3 Continuità dei campi

( prima componenti normali )

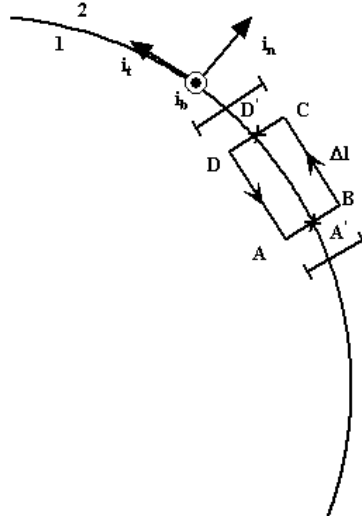


Figure 3: superficie di separazione tra due mezzi 1 e 2

Consideriamo una superficie di separazione tra due mezzi. Dalla 2<sup>a</sup> equazione di Maxwell ( se  $\Delta l$  e  $\Delta h$  sono piccoli) si ha, fissato un  $\mathbf{i}_b$  sulla superficie (generico) e un conseguente  $\mathbf{i}_t$

$$\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l - \int_C^D \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS - \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_t \Delta l + \int_A^B \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS = \Delta l \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_b dS + \Delta l \frac{d}{dt} \int \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_b dS$$

L' ultimo integrale è limitato da  $\Delta l \text{Max} |\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n| \Delta h$  e quindi tende a zero con  $\Delta h$ . Analogamente gli integrali su AB e CD. Resta allora

$$\Delta l (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_b dS$$

In assenza di correnti superficiali l'ultimo termine è nullo. Si dice corrente superficiale una  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s \cdot \delta(s)$ . Fisicamente equivale ad un flusso di particelle concentrato in un volume di spessore paragonabile al raggio delle particelle stesse ( e quindi considerabile nullo). In presenza di tali correnti si ha  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_b$  (l'integrale  $\frac{1}{\Delta l}$  per la corrente che fluisce attraverso la linea A'D'). Ma  $\mathbf{i}_b$  è arbitrario, mentre  $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n$  e quindi

$$\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_b = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n = \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b$$

per qualsiasi  $\mathbf{i}_b \Rightarrow$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{J}_s$$

Analogamente

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0$$

[Ovviamente se necessario si possono considerare due versori tangenti sulla superficie  $\mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v$  (ortogonali  $\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_u \times \mathbf{i}_n$ ) ottenendo  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_u = -\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_v$ ,  $(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_v = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{i}_u$ ].

Consideriamo invece un volume di base  $\Delta S$ . Si ha

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S - \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{i}_n \Delta S = \Delta S \int_{\Delta h} \rho dS$$

L'ultimo integrale, per  $\Delta h \rightarrow 0$ , è nullo a meno che non vi siano densità superficiale  $\rho_s$  (cariche distribuite solo alla superficie). Si ha

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \rho_s$$

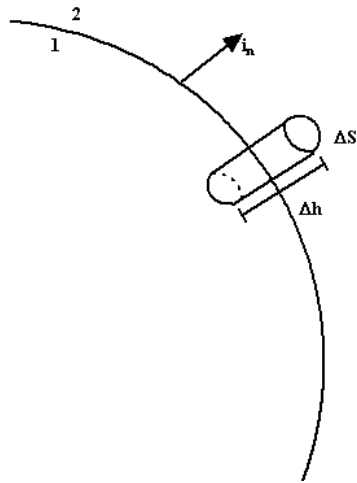


Figure 4: superficie di separazione tra due mezzi 1 e 2

$$(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n = 0$$

e dall'equazione di continuità,

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_s$$

# 1 ONDE PIANE

Le equazioni di Maxwell dipendono da tre variabili spaziali e dal tempo. Conviene pertanto cominciare a determinare delle soluzioni particolari di tali equazioni, ovvero soluzioni che godano di particolari proprietà, piuttosto che porsi il problema della soluzione completa di tali equazioni.

Le soluzioni più semplici sono quelle ottenute nel vuoto in assenza di sorgenti, e che dipendono solo da una coordinata spaziale. Tali soluzioni sono quindi campi elettromagnetici costanti su tutti i piani ortogonali a tale direzione, e prendono il nome di *onde piane*.

Scegliamo allora un sistema di riferimento con l'asse  $z$  nella direzione in cui i campi variano, e applichiamo le equazioni di Maxwell a tale campo.

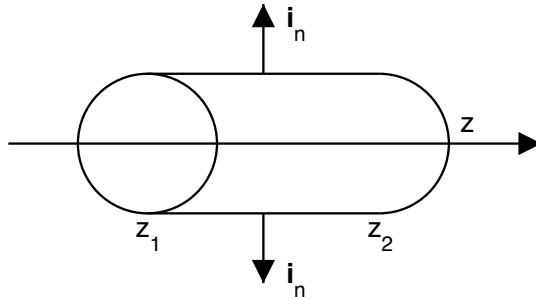


Fig. 1: Volume su cui applicare la legge di Gauss.

Partiamo dalla legge di Gauss, che nel nostro caso diventa

$$\oint_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0 \quad (1)$$

e appliciamola ad una superficie cilindrica con asse parallelo all'asse  $z$ . L'integrale diventa la somma di tre termini

$$\int_{S_1} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{S_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_{S_L} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0$$

dove  $S_1$  ed  $S_2$  sono le due basi, di area  $S_b$ , e poste a  $z = z_1$  e  $z = z_2$  rispettivamente, e  $S_L$  è la superficie laterale.

Per quanto riguarda quest'ultimo integrale, questo può essere scritto come integrale doppio

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{\Gamma} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dl dz$$

dove  $\Gamma$  è la circonferenza che delimita la base del cilindro. Rispetto a un diametro il campo elettrico è simmetrico (essendo costante sul piano ortogonale a  $z$ ), mentre il versore normale  $\mathbf{i}_n$  è antisimmetrico. L'integrale su  $S_L$  è quindi nullo. Resta allora, visto sempre la costanza di  $\mathbf{e}$ , e la direzione della normale alle basi del cilindro,

$$S_b \mathbf{e}(z_1) \cdot [-\mathbf{i}_z] + S_b \mathbf{e}(z_2) \cdot \mathbf{i}_z = 0 \quad (2)$$

Da cui segue

$$e_z(z_2) = e_z(z_1) \quad \forall z_1, z_2$$

ovvero la costanza della componente  $z$  del campo elettrico  $\mathbf{e}$ . Poichè siamo interessati a soluzioni che variano con  $z$ , poniamo direttamente a zero tale componente.

Identici ragionamenti si possono fare per  $h_z$ , data la simmetria delle equazioni di Maxwell, e quindi porremo anche  $h_z = 0$ . Ne segue che in una onda piana campo elettrico e campo magnetico sono ortogonali alla direzione  $z$  in cui l'onda varia.

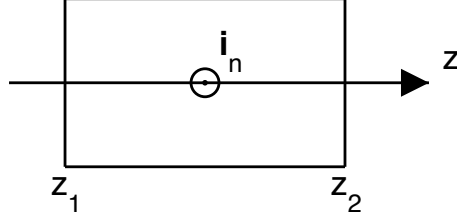


Fig. 2: Superficie  $S$  su cui applicare la legge di Ampere.

Passiamo ora alla legge di Ampere:

$$\oint_C \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l d\ell = \frac{d}{dt} \epsilon \int_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (3)$$

e applichiamo a una superficie  $S$  rettangolare, parallela all'asse  $z$ , che vada da  $z_1$  a  $z_2$ . La direzione  $\mathbf{i}_n$  della normale alla superficie è generica (purchè ortogonale a  $\mathbf{i}_z$ ). Il flusso del campo elettrico diventa

$$\int_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS = D \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dz = D(z_2 - z_1) \mathbf{e}(\xi) \cdot \mathbf{i}_n \quad (4)$$

essendo  $D$  la dimensione trasversa di  $S$ , e  $\xi$  un punto compreso tra  $z_1$  e  $z_2$  (teorema della media).

Per quanto riguarda la circuitazione del campo magnetico, questa si decompone nella somma di quattro integrali, due sui lati paralleli a  $z$  e due sui lati ortogonali a  $z$ . Sui primi due il campo magnetico è uguale, mentre  $\mathbf{i}_l$  è opposto. pertanto questi due integrali sono nulli. Quindi

$$\oint_C \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l d\ell = D\mathbf{h}(z_2) \cdot \mathbf{i}_t + D\mathbf{h}(z_1) \cdot [-\mathbf{i}_t] = D[\mathbf{h}(z_2) - \mathbf{h}(z_1)] \cdot \mathbf{i}_t \quad (5)$$

Sostituendo (4) e (5) in (3) segue allora

$$[\mathbf{h}(z_2) - \mathbf{h}(z_1)] \cdot \mathbf{i}_t = \epsilon(z_2 - z_1) \frac{d}{dt} \mathbf{e}(\xi) \cdot \mathbf{i}_n$$

Dividendo per  $z_2 - z_1$  e passando al limite per  $z_2 - z_1 \rightarrow 0$  si ha infine

$$-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_t = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n \quad (6)$$

Poichè  $\mathbf{i}_n$  è qualunque, dalla (6) si ottengono due equazioni scegliendo prima  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_x$  (col che  $\mathbf{i}_t = -\mathbf{i}_y$ ) e poi  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_y$  (col che  $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_x$ ):

$$-\frac{\partial}{\partial z} h_y = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \quad \frac{\partial}{\partial z} h_x = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_y \quad (7)$$

Partendo dalla legge di Faraday si ottengono equazioni analoghe alla (7), a patto di scambiare  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$ , di sostituire  $\mu$  ad  $\epsilon$  e di cambiare un segno. Il risultato è

$$\frac{\partial}{\partial z} e_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} h_x \quad - \frac{\partial}{\partial z} e_x = \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \quad (8)$$

Le (7,8) si dividono in due coppie di equazioni tra loro disaccoppiate. Ne segue che sono possibili onde piane in cui le uniche componenti diverse da zero sono  $e_x$  ed  $h_y$  e onde piane in cui sono diverse da zero solo  $e_y$  ed  $h_x$ . Per tali onde, evidentemente,  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{h}$  sono ortogonali anche tra loro. La soluzione generale è la somma di queste due soluzioni, e quindi per una onda piana  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{i}_z$  sono sempre *ortogonali*.

Possiamo allora risolvere le sole equazioni con  $e_x$  e  $h_y$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} h_y &= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x \\ -\frac{\partial}{\partial z} e_x &= \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y \end{aligned} \quad (9)$$

in quanto basta sostituire  $e_x \rightarrow e_y$  e  $h_y \rightarrow -h_x$  per avere la soluzione delle altre due equazioni.

## 2 PROPAGAZIONE PER ONDE

Prima di addentrarci nelle proprietà generali delle (9) e nel calcolo della loro soluzione generale (che verrà però fatto solo per il caso di soluzioni che varino sinusoidalmente nel tempo) vediamo di trovare qualche soluzione particolare delle (9) e di discuterne le proprietà. Le (9) sono equazioni differenziali a derivate parziali, in cui le variabili sono  $z$ ,  $t$ . Cerchiamo soluzioni, se esistono, che dipendono da tali variabili solo tramite la grandezza  $z - v_p t$ , essendo  $v_p$  una costante (dimensionalmente una velocità) da determinare. Poniamo cioè

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= \mathcal{E}(z - v_p t) \\ h_y(z, t) &= \mathcal{H}(z - v_p t) \end{aligned} \quad (10)$$

dove  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{H}$  sono funzioni da determinare, e sostituiamo nelle (9).

$$\begin{aligned} -\dot{\mathcal{H}} &= -v_p \epsilon_0 \dot{\mathcal{E}} \\ -\dot{\mathcal{E}} &= -v_p \mu_0 \dot{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} &= v_p \epsilon_0 \dot{\mathcal{E}} \\ \dot{\mathcal{H}} &= \frac{1}{v_p \mu_0} \dot{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (11)$$

dove il punto indica la derivata della funzione rispetto al proprio argomento. Le (11) costituiscono un sistema lineare omogeneo che può avere soluzione solo se le due equazioni sono equivalenti, ovvero se

$$v_p \mu_0 = \frac{1}{v_p \epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad v_p^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (12)$$

che fissa il valore di  $v_p$ .

La costante  $v_p \mu_0 = (v_p \epsilon_0)^{-1}$ , che lega  $\dot{\mathcal{E}}$  e  $\dot{\mathcal{H}}$  e che è dimensionalmente una impedenza, e prende il nome di *impedenza caratteristica* dello spazio libero. Tale grandezza s'indica in genere con  $\zeta$  e vale  $377 \Omega$ . Dalla (12) segue quindi

$$\zeta = v_p \mu_0 = \frac{1}{v_p \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (13)$$

Notiamo poi che le equazioni delle onde piane determinano solo  $v_p^2$  e quindi vi saranno soluzioni funzione di  $\xi^+ = z - v_p^+ t$  e soluzioni funzione di  $\xi^- = z - v_p^- t$ , essendo  $v_p^+$  la radice quadrata positiva di  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$  e  $v_p^- = -v_p^+$ .

Dalle (11) segue poi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\xi} = \zeta \frac{d\mathcal{H}}{d\xi} \quad (14)$$

e, a parte una costante arbitraria che possiamo fissare pari a 0,

$$\mathcal{E}(\xi^+) = \zeta \mathcal{H}(\xi^+) \quad (15)$$

che è l'unica condizione imposta sulla  $\mathcal{E}$  (ed  $\mathcal{H}$ ). Allo stesso modo si ottiene  $\mathcal{E}(\xi^-) = -\zeta \mathcal{H}(\xi^-)$ . In altri termini, dette  $f$  e  $g$  due funzione arbitrarie, sono separatamente soluzioni delle equazioni delle onde piane sia

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= f(z - v_p t) \\ h_y(z, t) &= \frac{1}{\zeta} f(z - v_p t) \end{aligned} \quad (16)$$

sia

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= g(z + v_p t) \\ h_y(z, t) &= -\frac{1}{\zeta} g(z + v_p t) \end{aligned} \quad (17)$$

Prendiamo in particolare la (16). Se consideriamo la *fotografia* del campo elettrico a due istanti diversi di tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , otteniamo rispettivamente  $f(z - v_p t_1)$  e  $f(z - v_p t_2)$ . In altri termini i due andamenti di campo sono uguali come forma ma si trovano in punti diversi dell'asse  $z$ . Se  $f(\xi)$  è diversa da 0 solo tra 0 e  $Z$ , allora il campo all'istante  $t_1$  è diverso da 0 tra  $z = v_p t_1$  e  $z = v_p t_1 + Z$ , mentre il campo all'istante  $t_2$  è diverso da 0 tra  $z = v_p t_2$  e  $z = v_p t_2 + Z$  (vedi Fig. 3).

La funzione  $f(z - v_p t)$  rappresenta dunque una *onda* ovvero una *configurazione di campo che si muove nello spazio con velocità finita misurabile, mantenendosi riconoscibile*<sup>1</sup>. Il moto di un'onda è detto *propagazione*. Naturalmente questa onda deve avere una causa (ovvero una sorgente) posizionata per valori di  $z$  negativi (ovvero minori di quelli in cui stiamo considerando l'onda) e attiva precedentemente agli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  in cui stiamo guardando tale onda.

---

<sup>1</sup> Nel nostro caso, anzi, si mantiene esattamente inalterata la forma e persino la ampiezza.



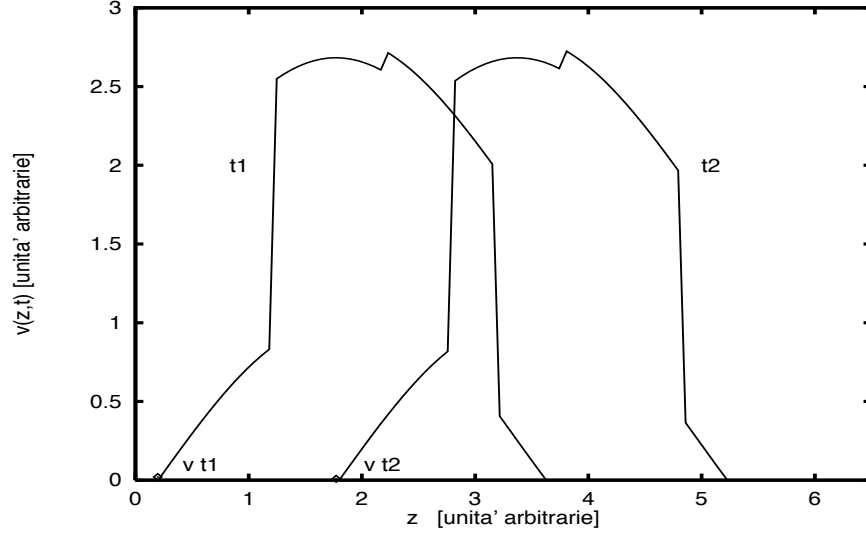


Fig. 1: Andamento del campo elettrico nello spazio negli istanti  $t_1$  e  $t_2$  (con  $t_2 > t_1$ ).

La velocità di *propagazione* dell'onda descritta da  $f(z - v_p t)$  si ottiene immediatamente come rapporto tra lo spazio percorso nel moto e il tempo impiegato percorrerlo, e vale

$$\frac{v_p t_2 - v_p t_1}{t_2 - t_1} = v_p \quad (18)$$

L'onda descritta da  $f(z - v_p t)$  è pertanto un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse  $z$  con velocità pari a  $v_p$ . Allo stesso modo si può verificare che  $g(z + v_p t)$  rappresenta un'onda che si propaga con la stessa velocità, ma nel verso negativo dell'asse  $z$ . Si può cioè dire che i vettori velocità delle due onde sono  $v_p \hat{i}_z$  e  $-v_p \hat{i}_z$ . Le due onde prendono anche il nome di onda *progressiva* e onda *riflessa*. Notiamo esplicitamente che, *separatamente* per le due onde, la forma di tensione e di corrente è la stessa (a parte un cambio di segno per l'onda riflessa). D'altra parte le equazioni delle onde sono lineari, e quindi, qualunque siano le funzioni  $f$  e  $g$ , anche

$$e_x(z, t) = f(z - v_p t) + g(z + v_p t) \quad (19)$$

è una possibile onda di campo elettrico. La corrispondente onda di campo magnetico vale però

$$h_y(z, t) = \frac{1}{\zeta} [f(z - v_p t) - g(z + v_p t)] \quad (20)$$

e quindi la forma dei due campi è diversa ed il loro rapporto (che separatamente per le due onde di (16) e (17) è costante e pari a  $\zeta$ ) diviene funzione di  $(z, t)$ . Si può dimostrare che le (19,20) costituiscono la soluzione generale di (9).

Dalla (12) segue che se la costante dielettrica vale  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  allora

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_r \epsilon_0) \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

ovvero la velocità di propagazione delle onde in un mezzo è numericamente pari alla velocità della luce nel mezzo stesso. Si noti che in tale mezzo l'impedenza intrinseca vale

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

### 3 DOMINIO DELLA FREQUENZA

Il caso più interessante di propagazione di onde elettromagnetiche è quando queste variano sinusoidalmente nel tempo in ogni punto con la stessa pulsazione  $\omega$  (ovvero con la stessa frequenza  $f = \omega/2\pi$ ). Ciò è possibile ad esempio se tutte le sorgenti dell'onda sono sinusoidali con la stessa pulsazione  $\omega$ <sup>1</sup>.

Sappiamo che una grandezza sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (21)$$

può essere rappresentata da un numero complesso<sup>2</sup>

$$v(t) \longrightarrow V_M e^{j\varphi} \quad (22)$$

nel senso che

- (a) la corrispondenza è biunivoca: noto il numero complesso  $A$  associato alla grandezza  $a(t)$ , quest'ultima vale

$$a(t) = \text{Re}[A e^{j\omega t}] \quad (23)$$

- (b) tutte le operazioni lineari (somma, moltiplicazione per un numero reale, derivazione, integrazione) possono essere fatte indifferentemente sulle due rappresentazioni. In particolare

$$\frac{dv}{dt} \longrightarrow j\omega [V_M e^{j\varphi}] \quad (24)$$

Per distinguere il caso in cui si utilizza la rappresentazione come funzione di  $(z, t)$  da quella in cui si utilizzano i numeri complessi corrispondenti, si parla di dominio del tempo ( $DT$ ) nel primo caso e di dominio della frequenza ( $DF$ ) nel secondo (si dirà quindi tensione nel  $DT$  o nel  $DF$ , equazioni nel  $DT$  o nel  $DF$  e così via).

Oltre alle operazioni lineari, è importante considerare la potenza, che richiede una operazione non-lineare (quadrato di una grandezza sinusoidale o prodotto tra due grandezze sinusoidali). Tali operazioni non sono immediatamente trasferibili sui numeri complessi, ma comunque la rappresentazione nel  $DF$  è utilizzabile per ottenere le grandezze energetiche di interesse.

---

<sup>1</sup> A rigori, questo è vero in quanto  $\mu, \epsilon$  sono costanti (ovvero non dipendono né dal tempo né dalla ampiezza dei campi). Le equazioni che regolano il fenomeno (nel nostro caso le equazioni di MAXwell) devono cioè essere *lineari* e a *coefficienti costanti* affinché a una sorgente sinusoidale corrisponda un effetto sinusoidale con la stessa frequenza.

<sup>2</sup> Si noti che, al contrario di quanto si conviene nella teoria dei circuiti, il modulo del numero complesso è pari al valore massimo del corrispondente segnale sinusoidale

Consideriamo ad esempio il calcolo di una potenza *istantanea* (ma queste considerazioni si applicano a qualunque prodotto di grandezze sinusoidali, e quindi anche a quadrati di queste grandezze)

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (25)$$

Nel caso sinusoidale tale potenza vale (usando la (22))

$$p(t) = |V| \cos(\omega t + \phi_V) |I| \cos(\omega t + \phi_I) = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2} |V| |I| \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) \quad (26)$$

dove  $|V| \exp(j\phi_V)$ ,  $|I| \exp(j\phi_I)$  sono i numeri complessi corrispondenti a  $v(t)$ ,  $i(t)$ , e sono state usate le formule trigonometriche di Werner.

Se calcoliamo il valore medio su di un periodo di  $p(t)$

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (27)$$

essendo  $T$  il periodo dell'onda sinusoidale, si ottiene la potenza *attiva* (o media)

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi_V - \phi_I) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right] \quad (28)$$

Pertanto nel *DF* non è possibile determinare la potenza istantanea ma è possibile calcolare facilmente la potenza media, ovvero quella che ha effetti energetici.<sup>1</sup>

Benchè la conoscenza della potenza attiva sia in genere quella di interesse, può essere utile anche valutare la parte oscillante della potenza istantanea. Infatti, quanto più il suo valore massimo

$$P_{VM} = \frac{1}{2} |V| |I|$$

è grande, fissata la potenza attiva, tanto più grandi saranno le ampiezze di tensione e corrente necessarie a fornire quella data potenza attiva.

Per valutare  $P_{VM}$  possiamo notare che

$$P_{VM}^2 = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]^2 + \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]^2$$

e quindi basta considerare insieme la potenza attiva e la cosiddetta *potenza reattiva*, definita da

<sup>1</sup> Ribadiamo che espressioni come la (28) non sono specifiche della potenza media. Ogni qualvolta una grandezza è il prodotto di due fattori sinusoidali (uguali o diversi) il suo valore medio è dato da una espressione come la (28). Ad esempio la potenza istantanea dissipata in una resistenza  $R$  percorsa da una corrente  $i(t)$  è

$$p_R(t) = R i^2(t) = R \left[ i(t) \cdot i(t) \right]$$

Se  $i(t)$  è sinusoidale il suo valore medio vale

$$\langle p_R(t) \rangle = R \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} I I^* \right] = \frac{1}{2} R |I|^2$$

essendo  $I$  il numero complesso corrispondente a  $i(t)$ .

$$P_R = \text{Im} \left[ \frac{1}{2} V I^* \right]$$

Fissata la potenza attiva, al crescere della potenza reattiva aumenta anche la parte oscillante della potenza istantanea  $P_{VM}$

Si definisce allora una *potenza complessa*

$$P = \left[ \frac{1}{2} V I^* \right] \quad (29)$$

in modo che la potenza attiva è la parte reale di tale potenza complessa, la potenza reattiva quella immaginaria e

$$P_{VM} = |P|$$

## 4 ONDE SINUSOIDALI

Consideriamo una onda piana sinusoidale nel tempo. Dalla forma generale delle onde piane, segue che questo è possibile se le funzioni  $f$  e  $g$  sono anch'esse sinusoidali, con la stessa pulsazione  $\omega$ . Infatti, se richiediamo che per  $z = 0$  risulti

$$e(0, t) = |E^+| \cos(\omega t + \varphi^+) + |E^-| \cos(\omega t + \varphi^-) \quad (30)$$

dovrà risultare  $f(-v_p t) = |E^+| \cos(\omega t + \varphi^+)$ , e analoga per  $g$ .

Se ne ricava quindi che

$$\begin{aligned} f(\xi) &= |E^+| \cos\left(\frac{\omega}{-v_p} \xi + \varphi^+\right) = |E^+| \cos\left(\frac{\omega}{v_p} \xi - \varphi^+\right) \\ g(\xi) &= |E^-| \cos\left(\frac{\omega}{v_p} \xi + \varphi^-\right) \end{aligned} \quad (31)$$

Pertanto la forma generale di una onda piana *sinusoidale* che si propaga in direzione  $z$  è

$$\begin{aligned} e(z, t) &= |E^+| \cos\left[\frac{\omega}{v_p}(z - v_p t) - \varphi^+\right] + |E^-| \cos\left[\frac{\omega}{v_p}(z + v_p t) + \varphi^-\right] \\ &= |E^+| \cos\left[\frac{\omega}{v_p} z - \omega t - \varphi^+\right] + |E^-| \cos\left[\frac{\omega}{v_p} z + \omega t + \varphi^-\right] \end{aligned} \quad (32)$$

Notiamo esplicitamente che l'ipotesi di una onda sinusoidale nel tempo implica automaticamente che l'onda ha un andamento sinusoidale anche nello spazio.

Si definisce costante di propagazione della onda piana la quantità

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (33)$$

con la convenzione di prendere sempre la radice reale positiva.

Per questo campo sinusoidale, possiamo considerare, per ogni punto  $z$ , il corrispondente numero complesso, che dipende solo da  $z$ :

$$E(z) = E^+ e^{-j\beta z} + E^- e^{j\beta z} \quad (34)$$

Nella rappresentazione (34), il primo termine è l'onda progressiva e il secondo quella riflessa. La possibile doppia scelta del segno di  $\beta$  si riflette nella presenza di due termini nella soluzione, con valori opposti di  $\beta$ . La convenzione fatta sul segno della radice quadrata consente di associare a ciascuna delle due possibili onde (incidente e riflessa) una espressione univoca.

La costante  $\beta$  gioca allora il ruolo della *pulsazione* ed il corrispondente *periodo spaziale*

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (35)$$

prende nome di *lunghezza d'onda*.

Può essere utile riscrivere la (34) mettendo in evidenza l'onda progressiva

$$E(z) = E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 + \frac{E^-}{E^+} e^{2j\beta z} \right] = E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 + \Gamma(z) \right] \quad (36)$$

L'ultima uguaglianza della (36) definisce la funzione  $\Gamma(z)$ , che prende il nome di *coefficiente di riflessione* e misura il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e quella dell'onda incidente<sup>1</sup>. Una importante proprietà del coefficiente di riflessione è che, essendo  $\beta$  reale,  $|\Gamma(z)|$  è costante.

A partire dalla rappresentazione (34) si ottiene, dalla prima della (\*), l'andamento del campo magnetico, come

$$H(z) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} \left[ E^+ e^{-j\beta z} - E^- e^{j\beta z} \right] \quad (37)$$

Ovviamente anche nella (37) vi sono i due termini di onda progressiva e riflessa, col segno meno tra di essi. Inoltre dalla (\*) segue che  $\beta/\omega\mu_0$  è l'inverso della impedenza caratteristica. Possiamo quindi scrivere anche il campo magnetico in una forma analoga alla (36) come

$$H(z) = \frac{1}{\zeta} E^+ e^{-j\beta z} \left[ 1 - \Gamma(z) \right] \quad (38)$$

## 5 DISCONTINUITA'

Le onde piane che abbiamo determinato possono esistere solo se la geometria è uniforme, non solo trasversalmente, ma anche rispetto a  $z$ . Tuttavia capita molto spesso che tale ipotesi non sia soddisfatta. Ciò può avvenire per due motivi:

- le proprietà geometriche o elettromagnetiche dello spazio variano con continuità rispetto a  $z$ ;
- la struttura in esame è costituita da più zone omogenee, ciascuna con parametri diversi da quelli delle altre.

---

<sup>1</sup> Si noti che, spesso, si indica la quantità  $\Gamma(0) = E^-/E^+$  semplicemente col simbolo  $\Gamma$ .

Per semplicità, non considereremo il caso di regioni con proprietà variabili con continuità, e ci concentreremo sul caso di zone omogenee separate da discontinuità. In particolare considereremo per ora solo discontinuità piane, e parallele tra loro.

Questo problema si può risolvere, in linea di principio, scrivendo la soluzione generale delle onde piane in ogni zona omogenea, e poi collegandole attraverso le superfici di discontinuità. In tal modo si perviene a un sistema lineare nelle ampiezze incognite delle soluzioni, che va risolto con una delle numerosissime tecniche disponibili. Tuttavia la complessità computazionale di tale procedura cresce rapidamente col numero di tratti omogenei diversi, e contemporaneamente si riduce altrettanto rapidamente la comprensione fisica del fenomeno. Nel caso più semplice di una sola discontinuità, invece, è possibile ottenere la soluzione in maniera semplice e fisicamente significativa.

Supponiamo allora che i parametri della regione di sinistra, estesa fino a  $z = 0$ , siano  $\mu_1$ ,  $\epsilon_1$  e quelli della regione di destra siano  $\mu_2$ ,  $\epsilon_2$ <sup>1</sup>.

La struttura viene alimentata con sorgenti poste in  $z = -\infty$  che quindi, in una zona omogenea, produrrebbero una onda progressiva di campo elettrico

$$E(z) = E_i e^{-j\beta_1 z} \quad (39)$$

in cui indichiamo col pedice 1 tutte le costanti (primarie e secondarie) della zona per  $z < 0$  e col pedice 2 quelle della zona per  $z > 0$ . Ovviamente la ampiezza  $E_i$  dipende dalla ampiezza della sorgente utilizzata, mentre la *forma* (39) di  $E(z)$ , ne è indipendente e dipende solo dal fatto che la zona è omogenea e uniforme.

L'onda progressiva (39) sarà presente, ma non da sola, anche nella struttura attuale e anzi deve essere considerata la causa prima dei campi che troveremo in essa. In tal modo si divide lo studio della discontinuità da quello della interazione tra sorgenti e zona omogenea (che serve a determinare l'ampiezza della onda che viaggia verso la discontinuità). Il campo (39) prende il nome di campo (onda) *incidente* ed è definito come quel campo che esisterebbe nella struttura se questa fosse priva di discontinuità e con costanti uguali a quelle della zona 1. Quando l'onda (39) incide sulla discontinuità, produce una onda riflessa nella zona 1 e una onda trasmessa nella zona 2. In altri termini il campo totale nella struttura sarà

$$E(z) = \begin{cases} E_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ E_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (40)$$

dove

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_i e^{-j\beta_1 z} + E_r e^{j\beta_1 z} \\ E_2(z) &= E_2(0) e^{-j\beta_2 z} \end{aligned} \quad (41)$$

Naturalmente le (41) sono anche la soluzione generale delle equazioni di Maxwell nella ipotesi di onde piane in direzione  $z$ , separatamente per le zone 1 e 2. Vi è solo una modifica: è stata posta a zero la ampiezza dell'onda riflessa nella zona 2 in quanto, essendo tale zona illimitata, non vi sono cause per  $z > 0$  che possano produrre una tale onda.

Anche il campo magnetico ha la stessa forma di (40,41)

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) & \text{se } z \leq 0 \\ H_2(z) & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$

---

<sup>1</sup> In sostanzialmente tutti i casi di interesse risulterà  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Non ci sono comunque difficoltà a considerare il caso più generale

con

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{\zeta_1} (E_i e^{-j\beta_1 z} - E_r e^{j\beta_1 z}) \\ H_2(z) &= \frac{1}{\zeta_2} (E_2(0) e^{-j\beta_2 z}) \end{aligned} \quad (43)$$

Per poter determinare le costanti  $E_r$ ,  $E_2(0)$  e così completare la soluzione del nostro problema, occorre ricordare che alla sezione  $z = 0$  della zona devono essere continui i componenti del campo elettrico  $\underline{E}_t$  e del campo magnetico  $\underline{H}_t$  tangenti alla superficie di discontinuità, e quindi trasversi rispetto a  $z$ . Nel nostro caso i campi sono tutti tangenti, e quindi ne consegue:

$$\begin{aligned} E_1(0^-) &= E_2(0^+) \\ H_1(0^-) &= H_2(0^+) \end{aligned} \quad (44)$$

Imponendo le (44) alle soluzioni (41,43) segue

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_2(0) \\ E_i - E_r &= \frac{Z_1}{Z_2} E_2(0) \end{aligned} \quad (45)$$

Le (45) sono un sistema lineare non omogeneo che consente di determinare le ampiezze incognite  $E_r$ ,  $E_2(0)$  Poichè queste ultime devono essere proporzionali a  $E_i$  per la linearità del problema, conviene introdurre il coefficiente di riflessione alla interfaccia

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} \quad (46)$$

Dalla prima delle (45) segue allora

$$\frac{E_2(0)}{E_i} = 1 + \Gamma \quad (47)$$

e sostituendo nella seconda delle (45) si ha

$$\frac{1 - \Gamma}{\zeta_1} = \frac{1 + \Gamma}{\zeta_2}$$

da cui segue, risolvendo,

$$\Gamma = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} \quad (48)$$

e anche

$$\frac{E_2(0)}{E_i} = 1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1} \quad (49)$$

Le relazioni (48,49) possono anche essere espresse in termini dell'inversa  $Y_i$  della impedenza caratteristica, parametro che viene detto *ammittenza caratteristica*. In particolare la (49) diventa

$$\Gamma = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = -\frac{Y_2 - Y_1}{Y_2 + Y_1} \quad (50)$$

Le relazioni (48,49) sono applicabili anche in altri casi, oltre a quello di discontinuità dei parametri per il quale sono state ricavate. La generalizzazione piu' immediata si ha quando un semispazio, di costanti  $\mu_1, \epsilon_1$  termina ad  $z = 0$  con una superficie sulla quale vale una *condizione di impedenza* ovvero una relazione del tipo

$$\underline{E}_t = Z_C \underline{i}_z \times \underline{H}_t \quad (51)$$

Nella (51)  $\underline{E}_t$  e  $\underline{H}_t$  sono i componenti del campo elettrico e del campo magnetico tangenti alla superficie di discontinuità, e  $Z_C$  è un parametro caratteristico della superficie, detta impedenza superficiale. Nel nostro caso campo elettrico e magnetico sono ortogonali tra loro e a  $z$  e quindi la (51) diventa

$$E(0^+) = Z_C H(0^+) \quad (52)$$

In presenza di una onda incidente (39), il campo elettrico e quello magnetico nel semispazio sono date ancora da  $E_1(z), H_1(z)$  di (41,43). Dalla (44) segue allora

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E(0^+) \\ E_i - E_r &= \frac{\zeta_1}{Z_C} E(0^+) \end{aligned} \quad (53)$$

che hanno per soluzione ancora le (48,49). Quindi nel semispazio 1 vi sarà una onda riflessa di ampiezza

$$E_r = \Gamma E_i \quad \text{con} \quad \Gamma = \frac{Z_C - \zeta_1}{Z_C + \zeta_1} \quad (54)$$

e in  $z = 0^+$  il campo elettrico sarà

$$E(0^+) = (1 + \Gamma) E_i \quad (55)$$

campo che coincide con quella al termine del semispazio 1 medesima.

Ad esempio se in  $z = 0$  vi è un C.E.P., allora  $\underline{E}_t$  è nullo e quindi  $E(0^+) = 0$ . La (29) può essere usata con  $Z_C = 0$  e segue allora  $\Gamma = -1$ . Se invece vi è un C.M.P., allora sarà nullo  $\underline{H}_t$  nonchè  $H(0^+)$ . Nella (29) il parametro  $Z_C$  dovrà andare all'infinito. Conviene in tal caso passare alle ammettenze, definendo  $Y_C = 1/Z_C$  e usando la (50).  $H(0^+) = 0$  implica  $Y_C = 0$  e segue allora da (50) che  $\Gamma = 1$ .



## INDICE

1. ONDE PIANE . . . . .	1
2. PROPAGAZIONE PER ONDE . . . . .	3
3. DOMINIO DELLA FREQUENZA . . . . .	6
4. ONDE SINUSOIDALI . . . . .	8
5. DISCONTINUITA' . . . . .	9

### INCIDENZA OBLIQUA DI UNA ONDA PIANA - LEGGE DI SNELL

Una ~~sp~~ onda piana che si propaga lungo l'asse z può essere espressa come

$$E_x = E_0 e^{-iKz} \quad H_y = \frac{1}{\zeta} E_0 e^{-iKz} = \frac{K}{\omega\mu} E_0 e^{-iKz} \quad K = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

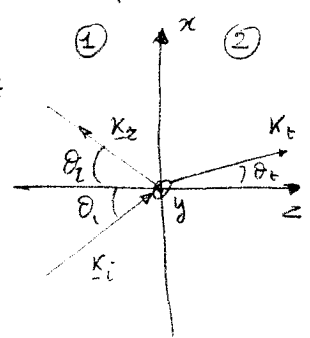
Se vogliamo considerare onde con direzione diversa possiamo, anziché risolvere di nuovo il problema, esprimere le relazioni precedenti in termini esclusivamente vettoriali.

Introduciamo allora un vettore  $\underline{k} = k \underline{i}_z$  (col. linearmente) col che possiamo scrivere  $Kz = \underline{k} \cdot \underline{z}$  e, se  $\underline{i}$  è un vettore ortogonale a  $\underline{k}$ , allora

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-i\underline{k} \cdot \underline{z}} \quad \underline{H} = \frac{1}{\omega\mu} \underline{k} \times \underline{E} = \frac{1}{\zeta} \underline{i}_x \times \underline{E}$$

dove  $\underline{i}_x$  è il vettore (reale) di  $\underline{k}$ . Queste relazioni sono indipendenti dal sistema di riferimento (basta proiettare sui nuovi assi per avere le onde piane relative al nuovo sistema di riferimento). Notiamo inoltre che  $\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$  (che, in presenza di perdite, è distinto da  $|\underline{k}|^2 = \underline{k} \cdot \underline{k}^*$ )

Questa rappresentazione può essere utile per studiare l'incidenza obliqua di una onda piana su un semispazio. L'onda incidente, con  $\underline{E}_0 = \underline{E}_i e^{-i\underline{k}_i \cdot \underline{z}}$  dà luogo a una onda riflessa con  $\underline{E} = \underline{E}_r e^{-i\underline{k}_r \cdot \underline{z}}$  e a una onda trasmessa  $\underline{E} = \underline{E}_t e^{-i\underline{k}_t \cdot \underline{z}}$ , le cui caratteristiche ~~dipendono~~ sono calcolabili a partire dalle condizioni di continuità dei campi.



In particolare per il campo elettrico si ha

$$\underline{i}_z \times \underline{E}_i e^{-i\underline{k}_i \cdot \underline{z}} + \underline{i}_z \times \underline{E}_r e^{-i\underline{k}_r \cdot \underline{z}} = \underline{i}_z \times \underline{E}_t e^{-i\underline{k}_t \cdot \underline{z}} \quad \text{in } z=0, \forall x, y$$

Ora le funzioni esponenziali sono tra loro linearmente indipendenti e quindi tale ~~uguaglianza~~ uguaglianza può essere vera solo se i tre esponenti sono tra loro uguali. Se per semplicità scegliamo gli assi x ed y in modo che  $\underline{k}_i$  sia sul piano (x,z) allora  $k_{zy} = k_{ty} = 0$  (i tre vettori  $\underline{k}$  sono complementari)

e

$$k_{zx} = k_{tx} = k_{ix}$$

che costituisce la forma più generale della legge di Snell.  
 In assenza di perdite possiamo introdurre gli angoli  $\theta_i, \theta_2, \theta_t$   
 ottenendo  $\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i$ , avendo indicato con  
 i pedici 1 e 2 le grandezze relative al semispazio di sinistra e di destra risp.  
 Segue allora la forma classica della legge di Snell

$$\theta_2 = \theta_i \quad n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad n_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i \mu_i}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

( $n_i$  è quindi l'indice di rifrazione del ~~mezzo~~ <sup>i-esimo</sup> mezzo rispetto al ~~vuoto~~ vuoto).  
 La seconda espressione è una equazione in  $\theta_t$  che ha soluzioni reali solo se  
 $\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \leq 1$ . Se  $n_1 > n_2$  vi possono quindi essere problemi se l'angolo  
 di incidenza è maggiore di  $\theta_L$ , detto angolo limite, tale che

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_L = 1 \Rightarrow \theta_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

In tal caso  $\theta_t$  è complesso e precisamente della forma  $\theta_t = \frac{\pi}{2} + i\psi$ .  
 Infatti  $\sin \theta_t = \cosh \psi$  che è reale e maggiore di 1. Come conseguenza  
 $\cos^2 \theta_t = 1 - \sin^2 \theta_t < 0$  e pertanto si ha  $k_{tx} = k_2 \sin \theta_t > k_2$   
 $k_{tz} = k_2 \cos \theta_t = -j |k_{tz}|$

dove  $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ . L'onda piana quindi si attenua senza propagarsi in direzione  
 z (fenomeno ~~molto simile~~ <sup>propagazione in</sup> detto ancora cut-off) e il vettore  $\underline{k}$   
 diventa polarizzato ellitticamente. Queste onde vengono dette onde  
 piane inhomogenee.

Per tali onde ~~molte~~ <sup>alcune</sup> delle relazioni già viste (in particolare tutte quelle che  
 coinvolgono  $\underline{k}$ ) non valgono più. Ad esempio  $\underline{E}$  ed  $\underline{H}$  hanno  
 polarizzazioni diverse e il rapporto dei loro moduli segue da

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\omega \mu} |\underline{k} \times \underline{E}| = \frac{|k|}{\omega \mu} |E| \quad \text{dove ora } \frac{|k|}{\omega \mu} \neq 1$$

# FORMULE DI FRESNEL

(1)

Il calcolo del campo riflesso in caso di incidenza obliqua è più complicato di quello per incidenza ortogonale, in quanto la direzione del campo elettrico gioca un ruolo fondamentale.

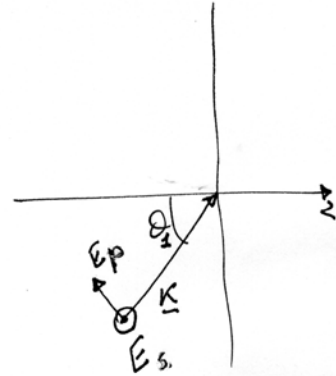
Se consideriamo la figura a lato,

un campo incidente orientato come

$\underline{E}_s$  è finemente diverso da uno orientato

come  $\underline{E}_p$ , e produrrà quindi  $\Gamma$  diversi

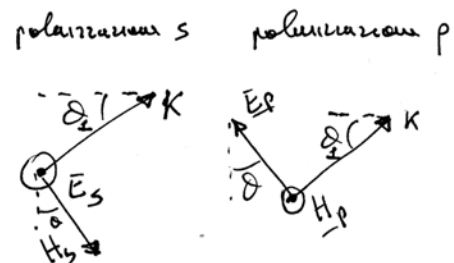
(mentre per  $\theta=0$  queste due situazioni sono equivalenti).



Poiché un campo generico può essere sempre decomposto nella somma di un campo orientato lungo  $\underline{E}_s$  e uno lungo  $\underline{E}_p$ , basta considerare solo questi casi, che vengono detti rispettivamente polarizzazione normale e polarizzazione parallela (con riferimento alla orientazione di  $\underline{E}$  rispetto al "piano di incidenza" ( $\underline{k}, \underline{z}$ ))

Il vantaggio di considerare questi casi (descritti in dettaglio nella

figura a lato) è che, per simmetria, i campi riflessi e



trasmessi ~~sono~~ esattamente la stessa polarizzazione. (2)

Infatti, <sup>ad esempio</sup> nel caso "s" il campo elettrico prodotto dalla riflessione non può avere componenti nel piano di polarizzazione in quanto la continuità delle ~~due~~ componenti tangenti va applicata separatamente. Il sistema lineare relativo alle componenti orizzontali è omogeneo e quindi ha soluzioni nulli.

Per quanto riguarda il calcolo del coefficiente di riflessione, si può ripercorrere quanto visto nel caso di incidenza ortogonale.

Il coefficiente di riflessione è legato alle impedenze, ~~considerate~~ che sono presenti nelle condizioni di continuità come rapporto tra campo elettrico e magnetico. Nel nostro caso occorre ricordarsi che sono coinvolti non i campi ma le loro componenti trasversali a  $z$ , e quindi le impedenze sono da calcolare come rapporto tra tali componenti.

Si ha quindi:

$$\Sigma_{1s} = \frac{E_s}{H_s \omega \mu_1} = \frac{\Sigma_1}{\omega \mu_1}$$

per il campo riflesso

$$\Sigma_{1p} = \frac{E_p \omega \mu_1}{H_p} = \Sigma_1 \omega \mu_1$$

e analoga per  $\Sigma_{2s}$ ,  $\Sigma_{2p}$ , (nella ipotesi che esista un angolo  $\theta_2$ ). (3)

Se no tale angolo non esiste (includere oltre l'angolo limite), o non valendo pari il problema, si può considerare che, se esiste  $\theta_2$ , allora

$$\cos \theta_2 = \frac{K_{z2}}{K_2} = \frac{\sqrt{K_2^2 - K_{t2}^2}}{K_2} = \frac{\sqrt{K_2^2 - K_{t1}^2}}{K_2}$$

dove  $K_{t1} = K_{t2}$  per la legge di Snell. Poichè  $K_{t1} = K_1 \sin \theta_1$  si ha

$$\Sigma_{2s} = \frac{\Sigma_2 K_2}{\sqrt{K_2^2 - K_1^2 \sin^2 \theta_1}} = \frac{\Sigma_2 n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}$$

$$\Sigma_{2p} = \frac{\Sigma_2 \sqrt{K_2^2 - K_1^2 \sin^2 \theta_1}}{K_2} = \frac{\Sigma_2}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}$$

essendo  $n^2 = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2$  il rapporto tra le due costanti dielettriche<sup>(1)</sup>, detto indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo

si ottengono con le formule di Fresnel

$$\Gamma_s = \frac{\Sigma_{2s} - \Sigma_{1s}}{\Sigma_{2s} + \Sigma_{1s}} \quad \Gamma_p = \frac{\Sigma_{2p} - \Sigma_{1p}}{\Sigma_{2p} + \Sigma_{1p}}$$

(1) Nella ipotesi che le permeabilità magnetiche siano uguali

Una caratteristica di tali espressioni è che esiste un valore di  $\theta_1$  (angolo di Brewster) per cui  $\vec{\Gamma}_p = 0$

(4)

Infatti, per avere  $\vec{\Gamma}_p = 0$ , si deve avere  $\sum_{1p} = \sum_{2p}$  ovvero

$$\sum_1 \cos \theta_1 = \frac{\sum_2}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}$$

Ora  $\sum_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{n^2 \epsilon_1}} = \frac{1}{n} \sum_1$ . Elevando al quadrato e sostituendo si ha

$$\sum_1^2 \cos^2 \theta_1 = \frac{1}{n^2} \frac{\sum_1^2}{n^2} (n^2 - \sin^2 \theta_1)$$

Dividiamo per  $\sum_1^2 \cos^2 \theta_1$  (ricordiamo che  $\frac{1}{\cos^2 \theta_1} = 1 + \tan^2 \theta_1$ )

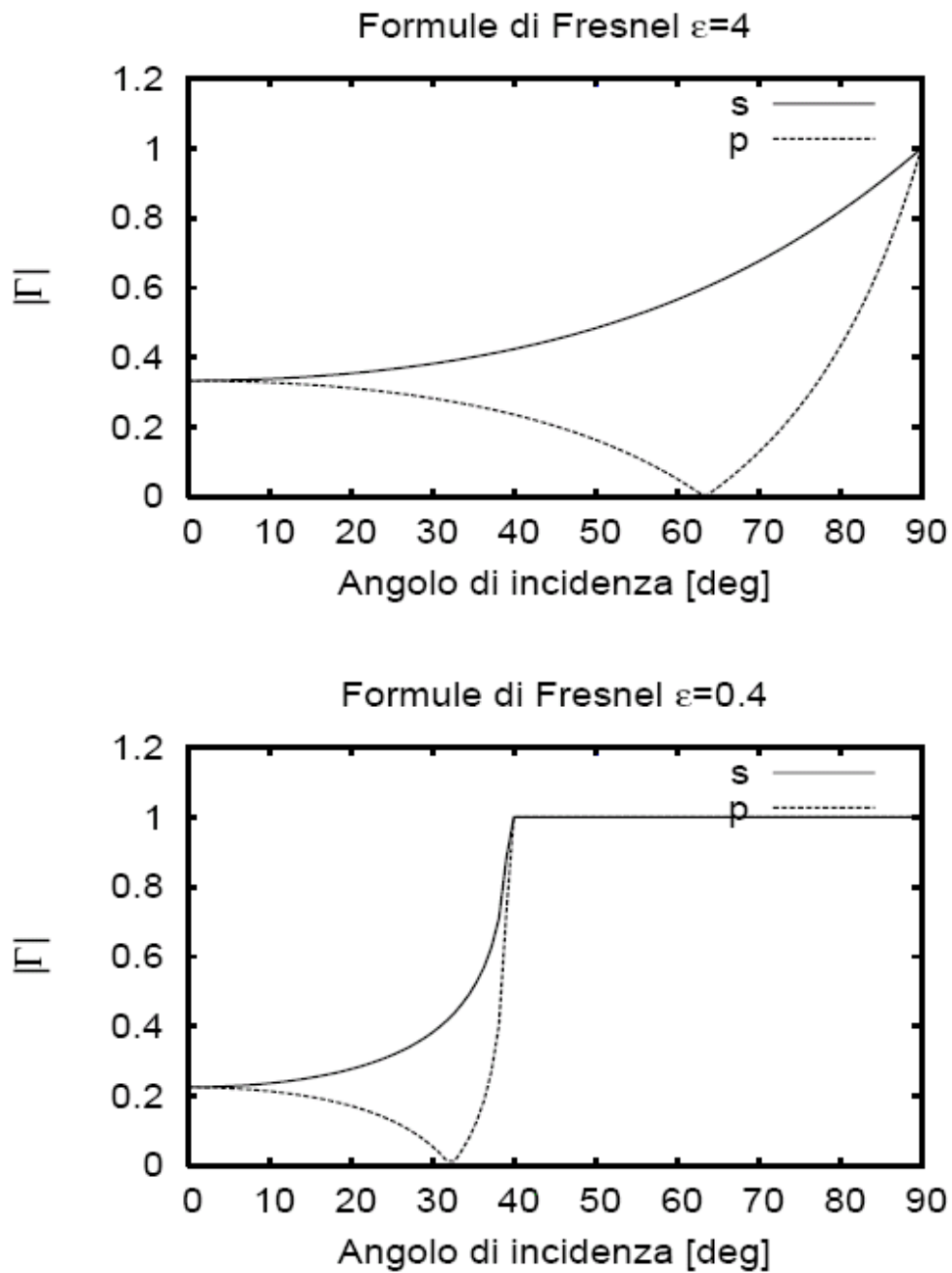
$$1 = \frac{1}{n^4} [n^2 (1 + \tan^2 \theta_1) - \tan^2 \theta_1]$$

Si ottiene una equazione in  $\tan^2 \theta_1$

$$(n^2 - 1) \tan^2 \theta_1 = n^4 - n^2 = n^2 (n^2 - 1)$$

da cui segue il valore dell'angolo di Brewster  $\theta_B$

$$\tan \theta_B = n$$



*Fig. 1: Andamento dei coefficienti di riflessione di Fresnel per  $\epsilon > 1$  e per  $\epsilon < 1$ .*



## RAGGI

(1)

Una onda piana può essere descritta alternativamente dalla direzione  $\underline{k}$  individuata dal vettore di propagazione, oppure dal piano ortogonale a  $\underline{k}$  su cui il campo  $\vec{E}$  è costante, e quindi, in particolare risulta costante la sua fase (piani equifase).

Questa conclusione può essere generalizzata a onde qualsiasi, che possono essere un insieme di superfici equifase <sup>(o fronti d'onda)</sup>, tra loro non intersecanti, e un insieme di curve, dette raggi, che punto per punto sono ortogonali alle superfici equifase e possono essere considerate le "traiettorie" di propagazione dell'onda.

In particolare in uno spazio omogeneo le superfici equifase possono avere forma qualunque (e si parla di onde piane, sferiche, cilindriche...) ma i raggi sono sempre rettilinei.

In particolare per una onda piana i raggi sono un fascio di rette parallele, mentre per una onda sferica i raggi si intersecano tutti in un punto (detto centro di fase dell'onda sferica).

Se consideriamo i raggi come traiettorie, vale anche a dire il centro di fase della onda sferica può essere considerato come la posizione della sorgente dell'onda. La "sorgente" di una onda piana è invece all'infinito. Naturalmente, se la sorgente è "molto lontana" rispetto alla zona in cui l'osserviamo, questa onda può essere approssimata con una onda piana. (2)

Il concetto di raggio, e più in generale l'"ottica geometrica", è applicabile nelle zone in cui le proprietà dei materiali variano lentamente rispetto alla lunghezza d'onda (e rispetto al raggio di curvatura delle superfici equifase). In particolare non valgono, quindi, nelle discontinuità.

Tuttavia è possibile superare questa limitazione se si assume che ogni raggio interagisca con la discontinuità isolatamente dagli altri. In tal caso si può considerare come interazione del raggio con la discontinuità, la interazione che avrebbe una onda piana diretta come il raggio.

In figura sono considerati tre raggi di una onda sferica che parte da P. Il raggio che arriva in A sulla superficie, con un angolo  $\theta$

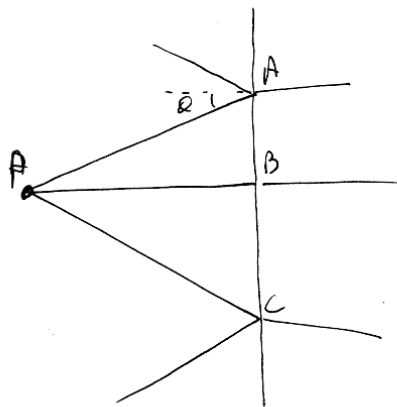


Fig 1

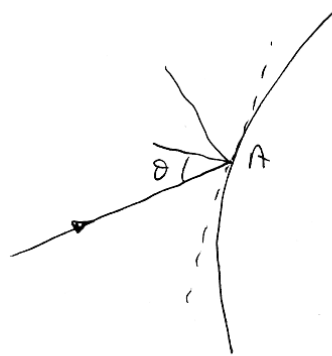


Fig 2

vieni rifleso e trasmesso con le stess leggi (legge di Snell e formula di Fresnel) di una onda piana che incide sulla superficie con angolo di incidenza  $\theta$ . Analogamente avviene negli altri raggi.

L'ipotesi di interazioni "locali" dei raggi con le superfici può essere ulteriormente esteso al caso di superfici non piane, purché con raggio di curvatura grande rispetto a  $\lambda$ . In tal caso (vedi Fig 2) il raggio che incide <sup>in A</sup> con un angolo  $\theta$  rispetto alla normale alla superficie viene rifleso, e rifratto, come una onda piana che incide, con un angolo  $\theta$ , nel piano tangente in A alla superficie.

In tal modo il concetto di raggio consente di analizzare, e risolvere, un gran numero di problemi elettromagnetici per i quali la soluzione esatta è altrimenti onerosa.