

CAPITOLO 9: Equazioni di Navier-Stokes

Riscriviamo l'equazione della quantità di moto in forma differenziale nella notazione vettoriale "non conservativa".

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla \bar{p} + \vec{\nabla} \bullet \vec{\tau}_{ij}$$

Proiettando l'equazione nelle direzioni x, y, z di un sistema di assi cartesiani si ha:

$$\text{direzione x: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\text{direzione y: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\text{direzione z: } \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

9.1 Relazioni tra tensioni e velocità di deformazione

Nella teoria dell'elasticità le componenti tensionali sono legate in maniera lineare alle componenti di deformazione. Nel caso dei fluidi Newtoniani le componenti tensionali sono legate in maniera lineare alle componenti della velocità di deformazione attraverso le seguenti relazioni di Stokes (vedi appendice 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \bullet \vec{V} \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \bullet \vec{V} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \bullet \vec{V} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Sostituendo, nelle equazioni scalari della quantità di moto, alle componenti del tensore degli

sforzi le espressioni (9.1), si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{direzione x: } \rho \frac{du}{dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}); \\ \text{direzione y: } \rho \frac{dv}{dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}); \\ \text{direzione z: } \rho \frac{dw}{dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \end{aligned}$$

in forma vettoriale

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{2}{3} \mu \nabla (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$$

Queste sono le *equazioni di Navier-Stokes per flussi comprimibili*.

Nel caso di flussi incomprimibili, il termine $\frac{2}{3} \mu \nabla (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ è nullo, in quanto $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, pertanto la precedente equazione diventa:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Queste equazioni sono istantanee possono perciò essere applicate sia a flussi laminari che a flussi turbolenti. Nel caso dei flussi turbolenti bisogna però ricordare che per applicarle correttamente bisognerebbe poter seguire anche le più piccole fluttuazioni della velocità (e degli altri parametri p e ρ). In questo modo la turbolenza sarebbe vista come un caso estremo di flusso non stazionario. In realtà si può dimostrare che questa strada non è percorribile [D.C. Wilcox].

9.2 Le equazioni per moto turbolento e le tensioni di Reynolds.

Indicando rispettivamente con V il valore istantaneo della velocità, con \bar{V} il “valore medio” e con V' il valore fluttuante si può scrivere:

$$V = \bar{V} + V'$$

dove il valore medio è così definito,

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V(x, y, z, t) dt$$

Segue che il valore medio delle fluttuazioni è zero, essendo:

$$\bar{V}' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (V - \bar{V}) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} V dt - \bar{V} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \right) = \left(\bar{V} - \frac{1}{T} \bar{V} T \right) = 0$$

Nota:

Per caratterizzare quantitativamente la struttura della turbolenza viene spesso definita l'intensità di turbolenza o livello di turbolenza:

$$T.I. = \frac{\sqrt{(\bar{V}')^2}}{\bar{V}} = \frac{1}{T} \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} (V')^2 dt}{\bar{V}}$$

Dopo quanto esposto, risulta conveniente esprimere le componenti della velocità (u, v, w) nella maniera seguente:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

analogamente per le variabili dipendenti p e ρ .

Consideriamo per semplicità il caso di un flusso incomprimibile e riscriviamo l'equazione della Quantità di Moto lungo la direzione x:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (9.2)$$

Ricordando l'equazione di continuità per flussi incomprimibili e moltiplicando tutti i termini per ρu si ha:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} + \rho u \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.3)$$

Sommando la (9.2) e la (9.3) si ottiene:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \rho u \frac{\partial w}{\partial z} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

raccogliendo i termini dentro parentesi per le derivate si ottiene:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (u v)}{\partial y} + \rho \frac{\partial (u w)}{\partial z} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

che possiamo infine scrivere:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} - \rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} - \rho u w)$$

Tale equazione è valida per velocità e pressione istantanee (la densità è costante perché si è supposto il flusso incomprimibile); per cui avremo:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') = \rho g_x - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \rho \bar{u}^2 - \rho u'^2 - 2\rho \bar{u} u') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} - \rho \bar{u} \bar{v} - \rho u' v' - \rho \bar{u} v' - \rho u' \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} - \rho \bar{u} \bar{w} - \rho u' w' - \rho \bar{u} w' - \rho u' \bar{w})$$

Applicando l'operatore Media a ogni termine e ricordando che: $\bar{u}' = 0$, $\bar{v}' = 0$, $\bar{w}' = 0$ si ottiene:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\rho u' w'} \right)}$$

Equazioni analoghe si ottengono lungo le direzioni y e z.

I termini $-\rho \bar{u}^2$, $-\rho \overline{(u'v')}$, $-\rho \overline{(u'w')}$ sono chiamati *tensioni turbolente* o *tensioni di Reynolds* e sono dovute al trasporto di quantità di moto associato alle componenti fluttuanti della velocità.

Che i termini: $-\rho \bar{u}^2$, $-\rho \overline{(u'v')}$, $-\rho \overline{(u'w')}$ rappresentino fisicamente delle tensioni si può vedere considerando un elemento dS di superficie infinitesima di fluido, Fig.9.1 [Comolef], e su di essa la componente fluttuante v' normale e la componente fluttuante u'' . La portata massica che attraversa la superficie dS è data da:

$$\rho v' dS$$

Il flusso attraverso dS subirà una variazione di quantità di moto pari a:

$$\rho v' dS u'$$

di conseguenza sulla superficie dS si eserciterà una forza pari a:

$$dF = \rho v' dS u' \quad \text{dunque una tensione tangenziale } \frac{dF}{dS} = \rho v' u' \quad \text{il cui valore medio sarà:}$$

$$\boxed{\tau_t = \rho \overline{(v' u')}} \quad \text{che si sommerà alla tensione tangenziale di origine viscosa:}$$

$$\boxed{\bar{\tau} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \overline{u' v'}}$$

Le tensioni di Reynolds si sommano algebricamente alle tensioni dovute al trasporto di quantità di moto a livello molecolare μ . (Sperimentalmente le tensioni di Reynolds possono essere misurate utilizzando strumenti ad alta risposta in frequenza come l'anemometro a filo caldo o l'anemometro laser).

9.3 Soluzione empirica delle equazioni di Reynolds nei flussi quasi-monodimensionali, incomprimibili e isoterma

Nel caso di flusso incomprimibile, isoterma e 2D, ma prevalente lungo la direzione dell'asse x ($\bar{v} = 0$), le equazioni di Continuità e di Reynolds, diventano:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'} \right)$$

Relativamente al flusso su lastra piana e nei condotti, si può ipotizzare, senza scostarsi troppo dalla realtà, che le tensioni di Reynolds si riducano al termine $-\rho \overline{u'v'}$, perciò la seconda equazione diventa:

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} \cong \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right)$$

Il termine tra parentesi può essere interpretato come la somma di due tensioni tangenziali, la prima dovuta alla viscosità molecolare, la seconda dovuta alla viscosità turbolenta:

$$\tau_t = \tau_{lam} + \tau_{turb} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

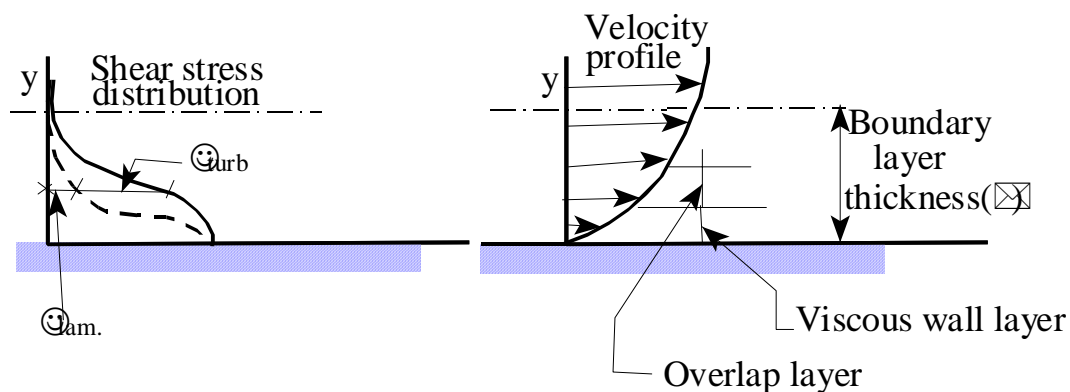


Fig. 9.2

Il termine dovuto alla turbolenza può essere semplificato introducendo la cosiddetta Viscosità Turbolenta, spesso indicata con ρ_t . Tale approccio (noto come ipotesi di Bussinesq) consente di esprimere la tensione turbolenta come

$$\tau_{turb} = \rho_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \equiv -\rho \overline{u'v'}$$

In questo modo introducendo una grandezza chiamata *Lunghezza di miscelamento di Prandtl* è possibile esprimere la viscosità turbolenta come:

$$\rho_t = \rho \cdot l_m^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

perciò la precedente espressione diventa:

$$\tau_t = \rho \cdot l_m^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

Il problema è perciò ricondotto alla determinazione della lunghezza di miscelamento. Si è così introdotto uno dei più semplici *modelli di turbolenza*, per risolvere alcuni tipi di flussi turbolenti incomprimibili. In letteratura e nei codici CFD sono proposti diversi modelli di turbolenza che vengono propriamente impiegati in relazione del tipo di flusso da analizzare [D.C. Wilcox]

CAPITOLO 10: INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLO STRATO LIMITE

Intorno al 1904 lo scienziato L. Prandtl intuì che il flusso attorno ai corpi può essere diviso in due regioni:

1. Una regione molto sottile “vicino” alla parete del corpo detta anche “strato limite” (dove i gradienti di velocità sono considerevoli e quindi il ruolo degli sforzi tangenziali è fondamentale);
2. Una regione “più esterna” fuori dallo strato limite (dove i gradienti di velocità sono quasi inesistenti e perciò gli sforzi tangenziali viscosi sono trascurabili).

Lo studio del flusso può essere condotto utilizzando nello strato limite le equazioni dei flussi viscosi (equazioni di Navier–Stokes), fuori dallo strato limite le equazioni per i flussi non viscosi (equazioni di Eulero). Come sarà mostrato in seguito è di fondamentale importanza, per calcolare le forze interagenti tra fluidi e corpi a contatto con essi, conoscere alcuni parametri che caratterizzano lo strato limite.

10.1 Caratteristiche dello strato limite

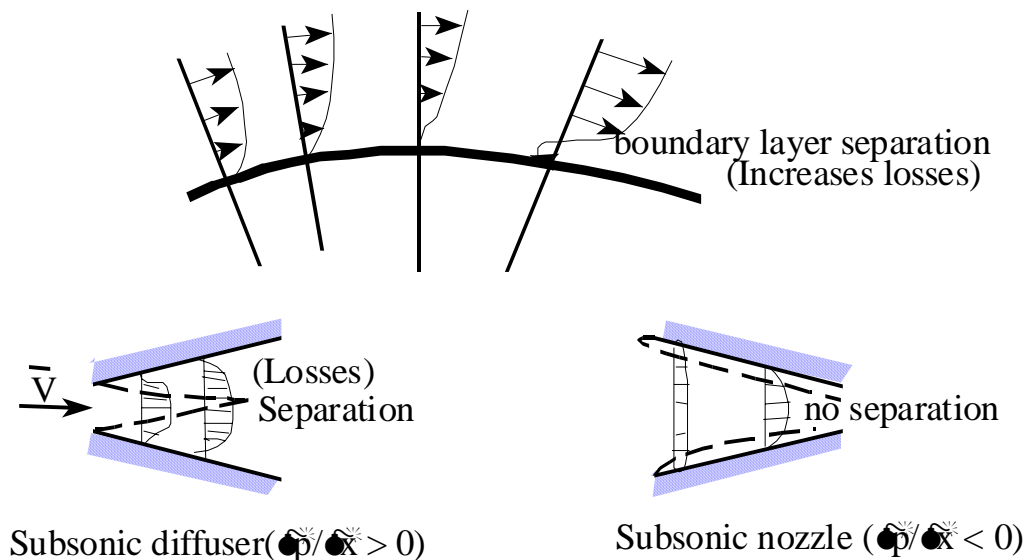
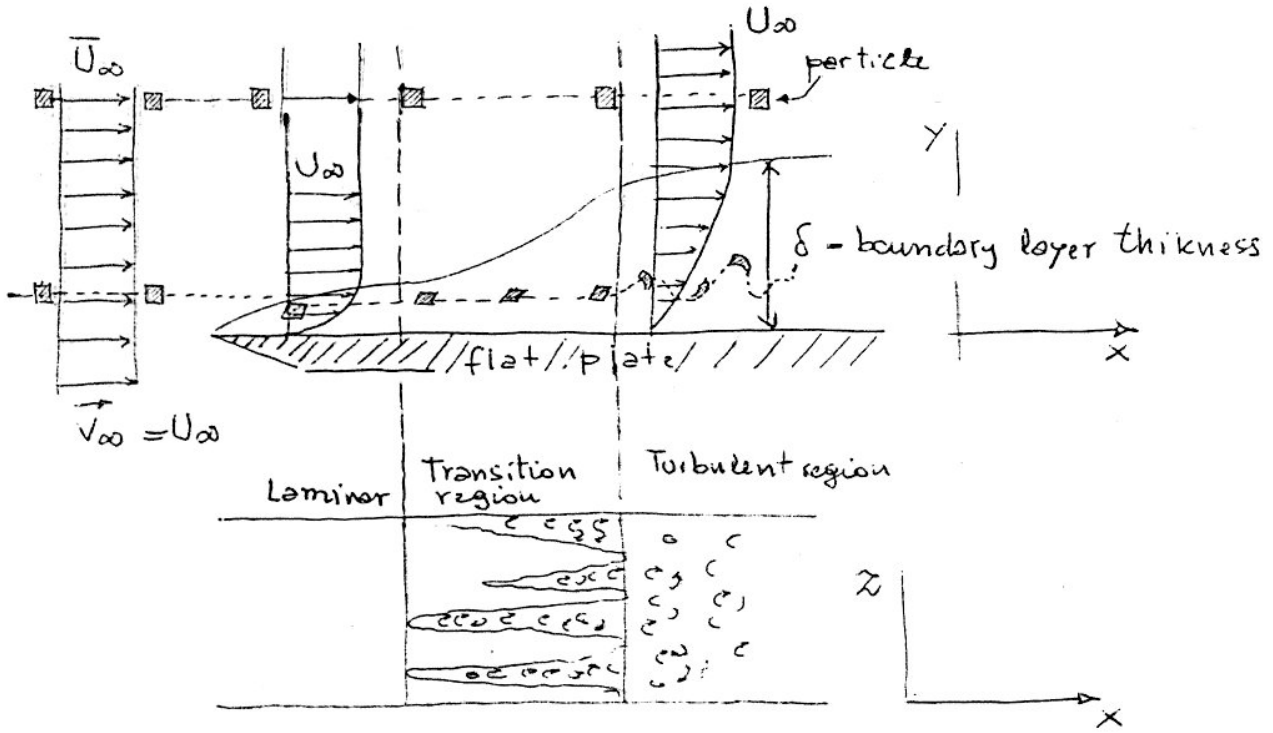


Fig. 10.1.1

10.2 Flusso su una lastra piana



Il numero di Reynolds è definito rispetto alla coordinata x .

$$R_e = \frac{Vx}{\nu} \text{ (dove } \nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ e' la viscosità cinematica).}$$

Si definisce "spessore dello strato limite" la distanza δ lungo la direzione y tale che:
 per $y = \delta \Rightarrow u = 0.99 U_\infty$

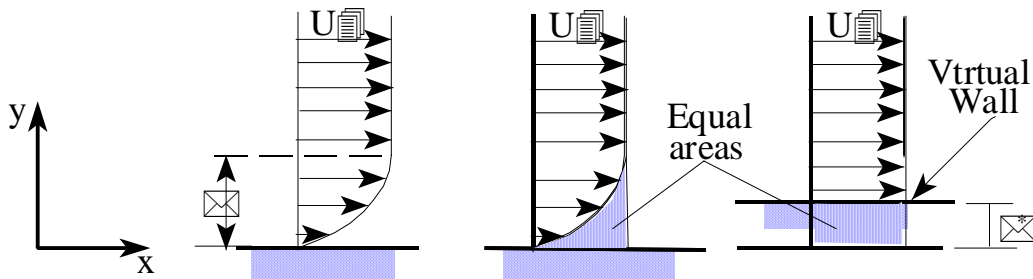


Fig. 10.2.1

Si definisce “*spessore di spostamento dello strato limite*” la distanza δ^* tale che:

$$\delta^* b U_\infty = \int_0^\infty b (U_\infty - u) dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (b \text{ è lo spessore della lastra})$$

Un altro parametro molto importante è lo “*spessore di spostamento della quantità di moto*”. Il significato fisico di questo parametro può essere dedotto considerando la seguente espressione che esprime la quantità di moto associabile a un flusso, in presenza dello strato limite:

$$\int_0^\infty \rho u (U_\infty - u) dA \quad \text{essendo } dA = b dy \text{ si ha:}$$

$$\rho b \int_0^\infty u (U_\infty - u) dy$$

Si può definire un parametro Θ tale che:

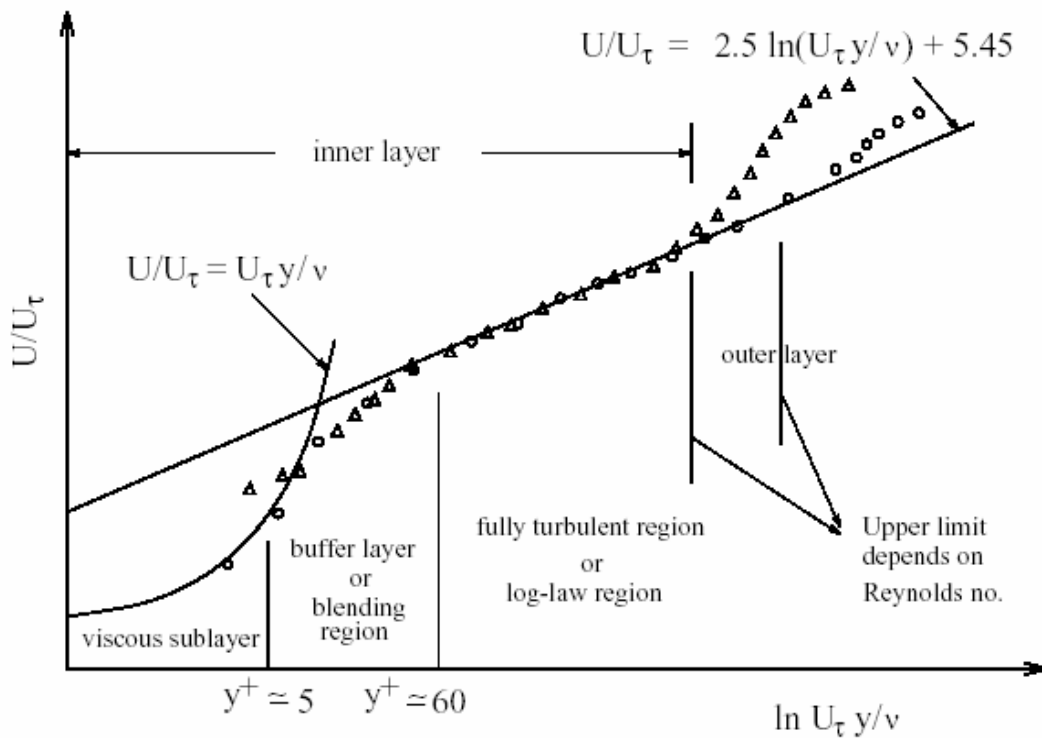
$$\rho b U_\infty^2 \Theta = \rho b \int_0^\infty u (U_\infty - u) dy \Rightarrow \Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

Il parametro Θ si definisce appunto “*spessore di spostamento della quantità di moto*”.

10.4 Lo strato limite turbolento e la Legge Logaritmica di parete.

Sperimentalmente si è visto che è possibile dividere lo strato limite turbolento in tre regioni vicino alla parete:

1. Sottostrato viscoso (*Wall layer*)– dove prevale l'effetto dell'attrito viscoso (flusso laminare)
2. Strato di sovrapposizione (*Overlap layer*) – nel quale l'effetto delle τ laminari e turbolente assumono la stessa importanza
3. Strato esterno (*Outer layer*)– in cui il flusso è turbolento e prevale l'azione delle tensioni di Reynolds.



– Figura 10.4.1 -Profilo dello strato limite turbolento su parete liscia.

L. Prandtl [F.M. White] dimostrò che nel sottostrato viscoso la velocità u non dipende dallo spessore dello strato limite (δ) ma segue una legge di questo tipo:

$$u = f(\mu, \tau_w, \rho, y)$$

Il sottostrato viscoso è molto sottile, all'interno gli sforzi tangenziali si possono considerare costanti e prossimi a quelli di parete:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx \tau_w = \text{costante}$$

Integrando tra $y=0$ ed un generico y , e imponendo la condizione di non-scivolamento alla parete si ha:

$$\tau_w dy \cong \mu du \Rightarrow \tau_w y_i = \mu u + \text{cost}$$

moltiplicando 1° e 2° membro per ρ :

$$\frac{\tau_w}{\rho} y = \frac{\mu u}{\rho} + \text{cost} \Rightarrow \frac{\tau_w}{\rho} \frac{y}{\nu} = u + \text{cost}$$

Ricordando la definizione di velocità di attrito, $\sqrt{\tau_w/\rho}$, indicata in genere con u_τ , si ricava la Legge di Parete, valida nel sottostrato viscoso:

$$\boxed{\frac{u}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = \left(\frac{y \sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} \right)}$$

Introducendo le coordinate di Von Karman u^+ , y^+ così definite: $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$; $y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu}$:

si ottiene la Legge di Parete in coordinate di Von Karman:

$$u^+ = y^+ \Rightarrow \frac{u}{u_\tau} = F\left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu}\right).$$

In seguito Von Karman dimostrò che nello strato esterno (*outer layer*) la velocità u è indipendente dalla viscosità molecolare μ ma si può esprimere con la seguente legge:

$$(U - u) = g(\delta, \tau_w, \rho, y)$$

Elaborando l'espressione con l'aiuto dell'analisi dimensionale si ottiene la cosiddetta legge di difetto di velocità (*velocity defect law*)

$$\boxed{\left(\frac{U - u}{u_\tau} \right) = G\left(\frac{y}{\delta}\right)}$$

All'interno dell'intervallo indicato come *fully turbulent region* nella figura 10.4.1, i due profili di velocità si possono sovrapporre. C.B. Mullikan (F.M. White) dimostrò che la sovrapposizione avviene solo se il profilo di velocità della zona intermedia (*overlap layer*) varia con la seguente legge logaritmica (*log law of the wall*):

$$\boxed{u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B} \quad (1.25)$$

I valori delle costanti k e B sono stati ricavati sperimentalmente e valgono approssimativamente $k \cong 0,41$ e $B \cong 5,0$.

L'equazione (1.25), che rappresenta la legge logaritmica per pareti lisce, può essere scritta anche nella diversa forma:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E \cdot y^+) \quad (1.26)$$

La costante E della (1.26) è tale che $B = \frac{1}{\kappa} \ln(E)$.

10.6 Concetto di Portanza e Resistenza

La Portanza e la Resistenza sono forze dovute all'interazione tra il fluido e un corpo immerso, Con riferimento alla Fig. 10.6.1 si definiscono:

Portanza: componente delle forze agenti sul corpo immerso, perpendicolare alla velocità U_∞

Resistenza: componente delle forze agenti sul corpo immerso, parallela alla velocità U_∞

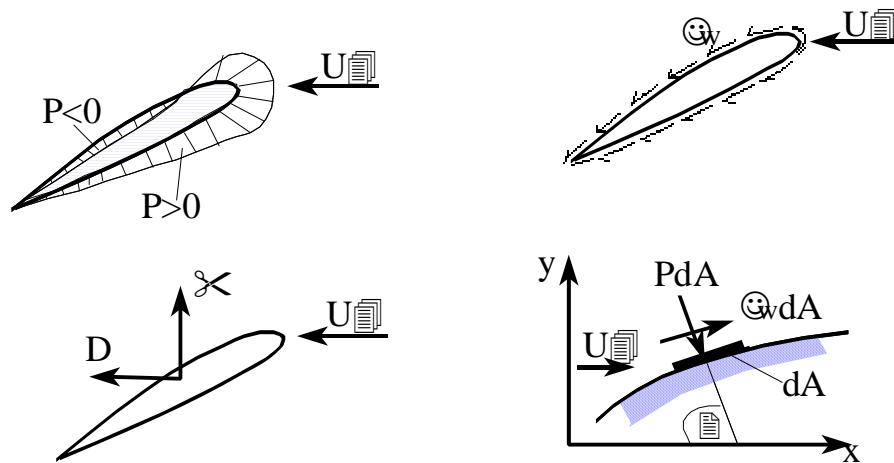


Fig. 10.6.1

Considerando le forze agenti sull'elemento di superficie elementare dA , si può scrivere:

$$dF_x = (pdA)\cos\theta + (\tau_w dA)\sin\theta$$

$$dF_y = -(pdA)\sin\theta + (\tau_w dA)\cos\theta$$

integrando lungo tutta la superficie del profilo si ottiene:

$$\text{Portanza} = L = \int_s dF_y = -\int_s p \sin\theta dA + \int_s \tau_w \cos\theta dA$$

$$\text{Resistenza} = D = \int_s dF_x = \int_s p \cos\theta dA + \int_s \tau_w \sin\theta dA$$

Per risolvere questi integrali e' necessario conoscere la geometria del corpo e la distribuzione di p e τ_w lungo la superficie del corpo, dunque bisogna conoscere il profilo dello strato limite lungo tutta la superficie del profilo. La soluzione di questo problema rappresenta uno dei maggiori ostacoli della fluidodinamica.

10.5 Perdite di carico nei condotti

E' possibile mediante l'analisi dimensionale trovare un metodo empirico-analitico per determinare le perdite di carico nei condotti, purchè il flusso sia: turbolento, incomprimibile e completamente sviluppato.

Per esempio l'equazione di *Darcy-Weisbach* è una delle espressioni più impiegate per calcolare le perdite di carico nei tubi "lisci":

$$h_L = f \frac{L V^2}{D 2g} \Rightarrow \Delta p = f \frac{L \rho V^2}{D 2}$$

dove:

$$f = F\left(\text{Re}_D, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \quad \text{è il fattore di attrito di Darcy.}$$

$$\tau_w = F_1(\rho, V, \mu, D, \varepsilon) = \text{tensione tangenziale di parete}$$

ε = rugosità superficiale;

D = diametro interno del condotto

μ = viscosità molecolare;

V = velocità media del flusso (Q/A);

ρ = densità del fluido.

Nota:

Per condotti a sezione non circolare si introducono i cosiddetti raggio idraulico e diametro idraulico così definiti:

$$R_h = A/\varphi, \quad D_h = 4A/\varphi; \quad \text{dove A è l'area del condotto e } \varphi \text{ è il perimetro bagnato.}$$

E' importante osservare che sostituendo nella formula di Darcy l'espressione per le perdite di carico già ricavata nel capitolo precedente, si ottiene, il valore del fattore d'attrito per flusso laminare:

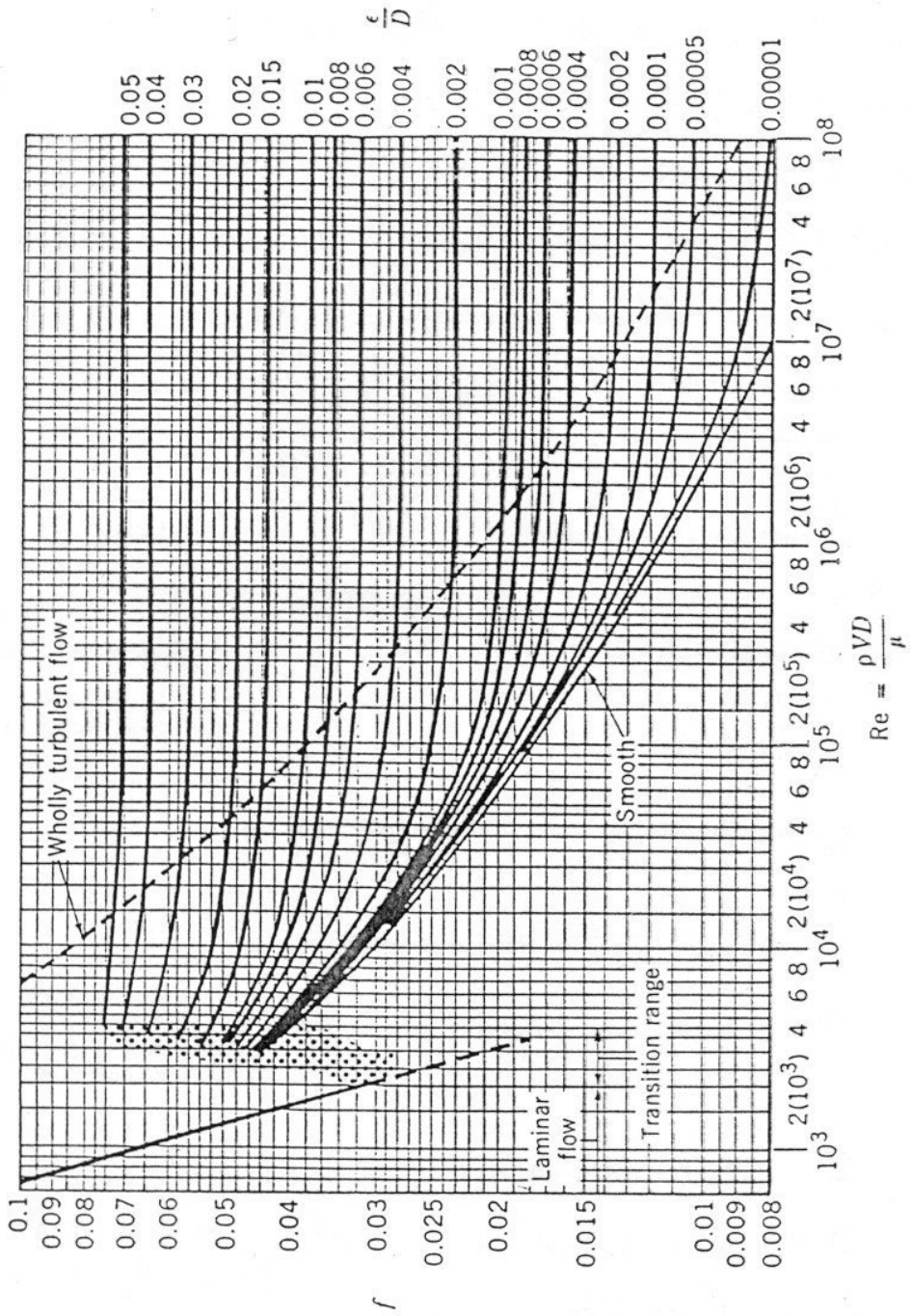
$$\Delta p = V \frac{32\mu l}{D^2}, \quad \text{perdite di pressione per flusso laminare: } f_{lam} = \frac{64}{\text{Re}_D} \quad \text{fattore d'attrito.}$$

10.6 Il diagramma di Moody

Il diagramma di Moody, mostrato in Figura, è la rappresentazione grafica della seguente formula di *Colebrook*, che è esprime analiticamente le perdite di carico nei condotti a sezione circolare:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

MOODY CHART



10.7 Perdite concentrate (o perdite minori)

Questo tipo di perdite e' dovuto a molti elementi addizionali (giunzioni, gomiti, T, valvole etc.) presenti nella stragrande maggioranza dei circuiti fluidici. Il metodo più comunemente utilizzato per valutare queste perdite consiste nello specificare un coefficiente di perdita K_c definito come segue:

$$K_c = \frac{h_c}{\frac{V^2}{2g}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}}$$

da cui si ricava il termine di perdita:

$$\boxed{h_c = K_c \frac{V^2}{2g}} \text{ o l'altra forma equivalente } \boxed{\Delta p_c = K_c \frac{\rho V^2}{2}}$$

I valori di K_c dipendono dalla geometria del sistema. I vari casi sono riportati su tabelle specifiche.

10.8 Espressione semplificata dell'Equazione dell'Energia per flussi reali.

L'espressione trovata per le perdite di carico, per flussi turbolenti, stazionari, incomprimibili, isotermi, quasi-monodimensionali, completamente sviluppati, consente di ricavare una forma molto semplice dell'Equazione dell'Energia:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + g \sum h_L + \sum gh_c \pm gH_s}$$

in cui i termini relativi alle perdite sono:

$$\sum h_L = \frac{1}{2g} \sum f_i \frac{L_i V_i^2}{D_i} \Rightarrow \text{perdite distribuite}$$

$$\sum h_c = \frac{1}{2g} \sum k_{c_i} V_i^2 \Rightarrow \text{perdite di carico concentrate}$$

Mentre l'ultimo termine rappresenta la prevalenza della macchina inserita tra la sezione 1 e la sezione 2 del circuito.

10.9 Calcolo di verifica e di progetto di reti di condotti *(da completare)*

Il calcolo di progetto o di verifica di una rete di condotti si presenta molto spesso nei progetti di ingegneria. I principi di base sono concettualmente gli stessi che si applicano per il dimensionamento di un circuito semplice, con l'aggiunta di alcune regole per agevolare i calcoli che, a seconda della complessità della rete, possono essere lunghi e laboriosi e talvolta bisogna procedere per successive iterazioni. Per questa ragione sono stati sviluppati dei codici di calcolo che semplificano notevolmente il lavoro. Le regole da tener presente possono essere così riassunte:

- La somma algebrica delle portate in ogni nodo deve essere zero;
- Il valore della pressione totale in ogni nodo deve essere lo stesso, il che significa che le perdite di carico in una maglia (circuito chiuso) deve essere zero;
- Le perdite di carico continue e concentrate in tutti i rami devono soddisfare le equazione dell'Energia.

Applicando queste regole si ottiene una serie di equazioni ai nodi e alle maglie che in generali si risolvono con metodi numerici.

[*vedi F.M. White a pag.375*]

10.6 Concetto di Portanza e Resistenza

La Portanza e la Resistenza sono forze dovute all'interazione tra il fluido e il corpo immerso nel fluido, con riferimento alla Fig. 10.6.1 si definiscono:

Portanza = La componente delle forze agenti sul corpo immerso, perpendicolare alla U_∞

Resistenza = La componente delle forze agenti sul corpo immerso, parallela alla U_∞

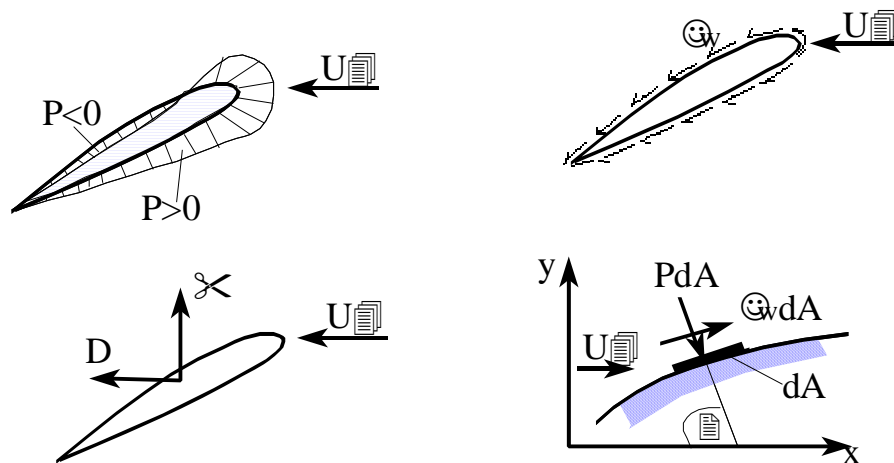


Fig. 10.6.1

Considerando le forze agenti sull'elemento di superficie elementare dA , si può scrivere:

$$dF_x = (pdA)\cos\theta + (\tau_w dA)\sin\theta$$

$$dF_y = -(pdA)\sin\theta + (\tau_w dA)\cos\theta$$

integrando lungo tutta la superficie del profilo si ottiene:

$$\text{Portanza} = L = \int_s dF_y = -\int_s p \sin\theta dA + \int_s \tau_w \cos\theta dA$$

$$\text{Resistenza} = D = \int_s dF_x = \int_s p \cos\theta dA + \int_s \tau_w \sin\theta dA$$

Per risolvere questi integrali e' necessario conoscere la geometria del corpo e la distribuzione di p e τ_w lungo la superficie del corpo, dunque bisogna conoscere il profilo dello strato limite lungo tutta la superficie del profilo. La soluzione di questo problema rappresenta uno dei maggiori ostacoli della fluidodinamica.