

CAPITOLO 6: EQUAZIONI DI BILANCIO DI UN VOLUME DI CONTROLLO INFINITESIMO

6.1 Analisi differenziale del flusso.

Le equazioni della fluidodinamica scritte con l'approccio del Volume di Controllo di dimensioni finite sono molto utili e pratiche, poiché non richiedono una conoscenza dettagliata di velocità, pressione, densità, ecc. entro il volume di controllo, ma solo la conoscenza dei parametri globali che agiscono su di esso.

Ci sono però molte situazioni nelle quali i dettagli del flusso sono importanti in senso locale, e per le quali il metodo precedente non fornirà l'informazione desiderata. In questo caso è necessario conoscere le equazioni di bilancio in forma differenziale. Per ricavarle applicheremo il Teorema di Trasporto di Reynolds a un Volume di Controllo Infinitesimo (I.C.V.).

Finora abbiamo considerato il Teorema di Trasporto di Reynolds come l'equazione di base per ricavare le tre equazioni fondamentali in forma integrale: Conservazione della Massa, Conservazione della Quantità di Moto e Conservazione dell'Energia. Partendo dalle leggi di conservazione in forma integrale, richiamate nel seguito, verranno quindi ricavate le analoghe equazioni di bilancio per un volume di controllo infinitesimo.

Teorema di Trasporto di Reynolds:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho b d\Omega \right) + \int_{CS} \rho b (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

dove la relazione tra grandezza estensiva B ed intensiva b è data da $B = mb$, ovvero in termini differenziali, e cioè relativamente ad ogni volume infinitesimo $d\Omega$ considerato nell'integrale, $b = dB/dm$.

La precedente è scritta nel caso il CV si muova con velocità di trascinamento \vec{V}_{CV} . Poiché vale la legge di composizione dei moti

$$\vec{V} = \vec{V}_{CV} + \vec{V}_r$$

nella valutazione del flusso attraverso la superficie del CV è importante considerare la velocità relativa $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CV}$.

Conservazione della Massa:

Se si considera come grandezza estensiva la massa della particella fluida, $dB = dm$, si ottiene per quella intensiva

$$b = \frac{dB}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1 \quad (\text{numero puro})$$

Con l'ipotesi che la massa del sistema rimanga costante ($B_{sys} = M_{sys} = \text{cost}$) e applicando il teorema del Trasporto di Reynolds, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\Omega + \int_{CS} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Conservazione della Quantità di Moto:

Analogamente, se la grandezza estensiva è la quantità di moto $dB = d(m \vec{V})$, si ottiene

$$b = \frac{dB}{dm} = \vec{V} \quad (\text{vettore})$$

Considerando il principio fisico espresso dalla legge di Newton e applicando il teorema del Trasporto di Reynolds, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{CS} \rho \vec{V} (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{CV}$$

Conservazione dell'Energia

Infine, se la grandezza estensiva è l'energia totale specifica della particella $dB = e dm$, dove $e = \hat{u} + V^2/2 + gz$, si ottiene

$$b = \frac{dB}{dm} = e \quad (\text{scalare})$$

Tenendo presente il primo principio della Termodinamica e mettendo in relazione le derivate fatte sul sistema con quelle eseguite sul CV mediante il teorema del Trasporto di Reynolds, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega + \int_{CV} \rho e (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}$$

Se il CV è fisso nello spazio ($\vec{V}_{CV} = 0$), nelle precedenti è $\vec{V}_r = \vec{V}$.

6.2 L'equazione di Continuità in forma differenziale

Si è considerata nel precedente paragrafo l'equazione di continuità in forma integrale, cioè applicata ad un CV finito e fisso nello spazio

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\Omega + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Si suddivide la superficie del volume di controllo in due parti, corrispondenti rispettivamente alle portate in ingresso ed in uscita dal volume stesso

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\Omega + \int_{CS-out} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_{CS-in} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Si applichi ora la stessa ad un volume di controllo infinitesimo ($d\Omega = dx dy dz$), come quello mostrato in Fig. 6.1, e si analizzi come si modificano i vari termini.

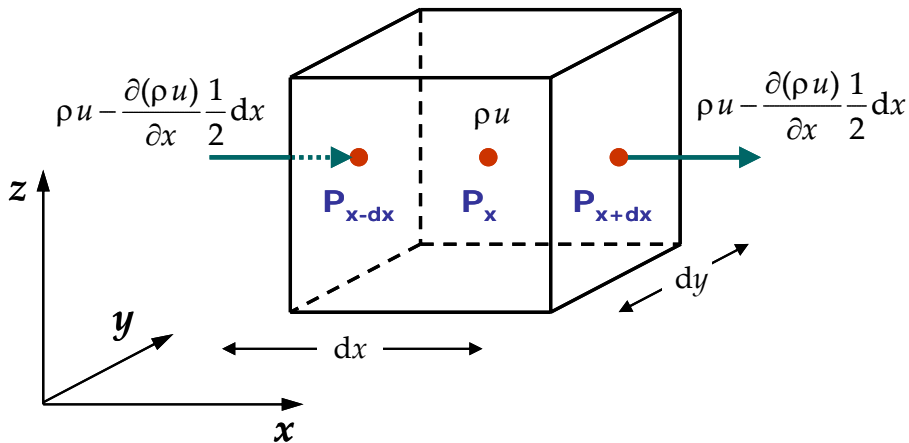


Fig.6.1: Volume di controllo infinitesimo

Per il primo termine, ricordando il significato fisico di integrale, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho d\Omega \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Il secondo e il terzo termine rappresentano il flusso di massa attraverso le facce del cubetto elementare. Considerando inizialmente le facce normali alla direzione x (vedi figura 6.1), per esse il prodotto scalare è dato da

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) = \pm \rho u$$

dove il segno positivo si ha quando i versi del vettore velocità e della normale alla superficie sono concordi. Inoltre, mediante sviluppo in serie di Taylor si

può esprimere il flusso attraverso le facce del volume in funzione di quello valutato nel punto centrale

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz - \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

Il flusso di massa nelle altre direzioni coordinate è, in maniera analoga:

direzione y $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz$

direzione z $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$

Dopo aver diviso per $d\Omega = dx dy dz$, l'equazione di continuità in coordinate Cartesiane ortogonali diventa pertanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0$$

o in forma vettoriale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0$$

o ancora in forma tensoriale Cartesiana ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial v_i / \partial x_i$, dove $i=1, 2, 3$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

6.3 L'equazione di conservazione della Quantità di Moto in forma differenziale

Come nel caso precedente si consideri l'equazione di conservazione della Quantità di Moto scritta per un volume finito

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{CS-in} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_{CS-out} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{CV}$$

Dove il termine corrispondente al flusso netto di Quantità di Moto è stato suddiviso nei due contributi relativi a flusso rispettivamente entrante o uscente. Si consideri ora lo stesso volume di controllo infinitesimo (figura 6.2) e si proceda ad applicare ad esso l'equazione appena scritta.

Per quanto riguarda il primo termine a primo membro (derivata Euleriana, della quantità di moto associata al Volume di Controllo), esso si riduce al contributo di variazione di quantità di moto del volumetto considerato

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} d\Omega \Rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dx dy dz$$

Il secondo e terzo termine a primo membro rappresentano i flussi di quantità di moto, rispettivamente in ingresso e uscita alla superficie del CV. A determinare il segno di questi termini è ovviamente il prodotto scalare. Si esprimano ora tali contributi, valutati sulle facce, in funzione dei valori del flusso di Quantità di Moto nel centro del volume infinitesimo. Per fare ciò si consideri inizialmente il contributo sulle facce normali alla direzione x

$$\left[\int_{CS-in} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_{CS-out} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \right]_x = -(\rho \vec{V} u)_{in} dy dz + (\rho \vec{V} u)_{out} dy dz$$

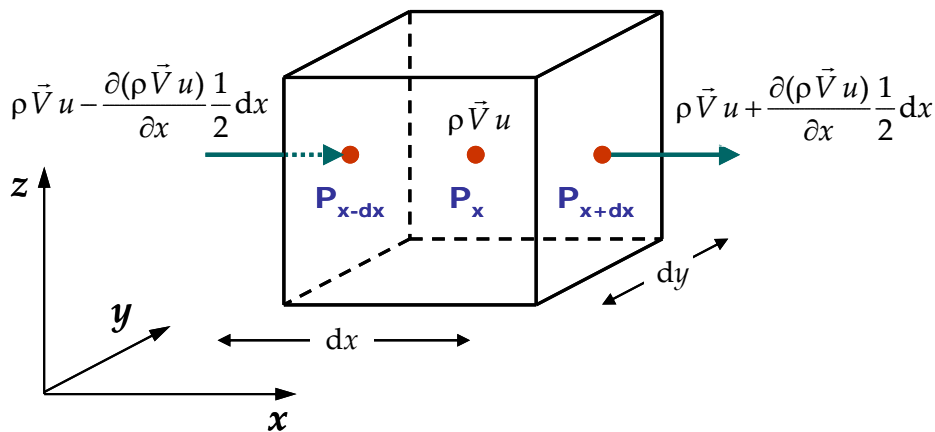


Fig.6.2: Volume infinitesimo e flussi di QM attraverso le superfici normali all'asse x

Procedendo, come per l'equazione di continuità, mediante sviluppo in serie di Taylor si ottiene

$$-(\rho \vec{V} u)_{in} dy dz + (\rho \vec{V} u)_{out} dy dz = -\left(\rho \vec{V} u - \frac{\partial(\rho \vec{V} u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\rho \vec{V} u + \frac{\partial(\rho \vec{V} u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

E il contributo dei flussi di QM attraverso la superficie, nelle tre direzioni coordinate diventa

$$\left[\frac{\partial(\rho \vec{V} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \vec{V} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \vec{V} w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

In generale, il primo termine a secondo membro della equazione integrale della QM si riduce alla sommatoria delle forze infinitesime agenti sul volumetto considerato

$$\sum \vec{F}_{CV} \Rightarrow \sum d\vec{F}_{CV}$$

Si può pertanto scrivere una prima forma differenziale della equazione di conservazione della Quantità di Moto

$$\left[\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{V}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \vec{V}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \vec{V}w)}{\partial z} \right] dx dy dz = \sum d\vec{F}_{CV}$$

Il termine a primo membro si può semplificare se si tiene presente che

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t};$
- $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \vec{V}) = \rho u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{V} \frac{\partial \rho u}{\partial x}$ e analoghe per le direzioni y e z ;

Usando le precedenti si ha infatti

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right] d\Omega + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] d\Omega = \sum d\vec{F}_{CV}$$

Ovvero

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] d\Omega + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] d\Omega = \sum d\vec{F}_{CV}$$

Se si considera l'equazione di Continuità

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

e si ricorda la relazione tra derivata Lagrangiana e derivata Euleriana [Capitolo 1], si ottiene una forma particolarmente importante della equazione di conservazione della QM

$$\rho d\Omega \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum d\vec{F}_{CV}$$

Che si ricollega immediatamente alla Legge di Newton scritta per un *sistema* costituito da una particella fluida.

Si tratta ora di definire meglio il termine che corrisponde alle forze agenti sul volumetto infinitesimo. In generale le forze sono costituite da forze di massa e da forze agenti sulle superfici del volume infinitesimo.

$$\sum d\vec{F}_{CV} = d\vec{F}_{grav} + d\vec{F}_{sup}$$

Per quanto riguarda le prime, si riconducono alle forze gravitazionali che, in un sistema di riferimento Cartesiano con l'asse z rivolto verso l'alto, si scrivono

$$d\vec{F}_{grav} = dm \vec{g} = -\rho d\Omega g \vec{k}$$

Per esprimere le forze agenti sulle superfici del volumetto, $d\vec{F}_{sup}$, occorre definire e studiare il cosiddetto *stato di sforzo* nel fluido in moto.

Stato di Sforzo per un fluido in moto

In analogia con i solidi:

- la conoscenza dello stato di sforzo in un punto rende possibile determinare le forze agenti su una generica superficie passante nel punto;
- le sollecitazioni agenti su una generica superficie si compongono di sforzi normali e tangenziali;

In contrasto con quanto avviene nei solidi:

- le sollecitazioni tangenziali nascono solo se il fluido è in moto.

Occorre ricordare che lo stato di sforzo nell'intorno di un punto di un corpo rigido non è definibile completamente dalle semplici tre componenti di un *vettore di sforzo*. Ciò è dovuto al fatto che ogni particolare vettore di sforzo dipende dall'orientamento del piano che passa per il punto considerato. Si può però dimostrare che gli sforzi normali e di taglio agenti su un qualsiasi piano passante per un punto possono essere espressi in funzione degli sforzi agenti su tre piani cosiddetti principali o su tre piani ortogonali che passano per il punto.

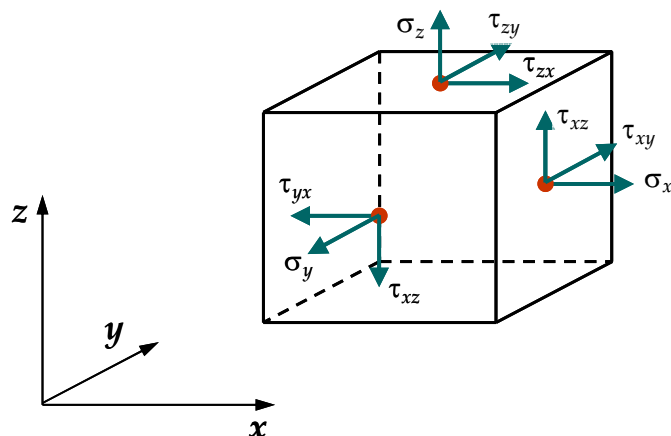


Figura 6.3: Volume infinitesimo, sollecitazioni agenti sulle tre facce visibili

Nella figura 6.3 sono riportate le sollecitazioni agenti sulle tre facce visibili del volume infinitesimo considerato. Si osservi come sulle facce che presentano normale concorde con l'asse coordinato (ad esempio le facce normali all'asse x e all'asse z), le direzioni positive delle tensioni sono concordi con gli assi coordinati. Viceversa, sulle facce che hanno normale opposta al rispettivo asse coordinato, anche i versi positivi delle sollecitazioni sono discordi con quelli degli assi.

Mentre per le sollecitazioni normali non c'è ambiguità nella simbologia, i simboli da assegnare alle sollecitazioni tangenziali sulle facce dipendono per il primo pedice dalla normale alla superficie sulla quale agiscono, per il secondo dalla loro direzione coordinata. Ad esempio, τ_{xy} è la sollecitazione tangenziale agente su una superficie normale all'asse x , ed è diretta secondo y .

Come detto precedentemente, per conoscere lo stato di sforzo in un punto, ovvero le sollecitazioni agenti su una superficie con orientazione qualsiasi passante per il punto, è necessario conoscere i vettori di sforzo su tre direzioni coordinate, per un totale di nove componenti, che definiscono il cosiddetto tensore degli sforzi. Esso costituisce un'entità di ordine superiore al vettore, ed è normalmente rappresentata con la matrice delle sue nove componenti.

$$\sigma_{ij} \equiv \pi_{ij} \equiv \pi = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che la matrice è simmetrica e che le componenti indipendenti del tensore degli sforzi sono solo sei.

Nel caso di fluido in quiete (idrostatica), gli sforzi sulle facce si riducono alle sole componenti normali dovute alla pressione idrostatica, normalmente

considerate positive se agenti in verso opposto alla normale uscente dalla superficie ($\sigma_{xx} = -p$):

$$\overset{=}{\pi}_{statico} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Per tener conto sia della situazione di fluido in quiete che di fluidi in moto, il tensore *dinamico* si riscrive facendo comparire la pressione idrostatica e un termine, $\tau_{ii} = \sigma_{ii} - p$ che si annulla quando il fluido è fermo o è ideale, in generale quando sono assenti le tensioni tangenziali, dovute alla viscosità e ai gradienti di velocità.

$$\overset{=}{\pi} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = -p \overset{=}{I} + \overset{=}{\tau}$$

dove $\overset{=}{I}$ è il tensore *identità* e $\overset{=}{\tau}$ è il tensore degli sforzi *viscosi*.

Risultante delle forze infinitesime superficiali

Dopo questa premessa, si esprimano le forze superficiali agenti su un piccolo elemento cubico di fluido in termini di sforzi agenti sulle facce dell'elemento, mettendo poi in relazione le grandezze sulle facce con quelle agenti nel centro del volume infinitesimo, mediante sviluppo in serie. Effettuando questa operazione inizialmente per tutte le componenti di sforzo agenti nella direzione coordinata x (figura 6.4), si ottiene

$$[dF_{sup}]_{dir-x} = (\sigma_x|_{x+dx} - \sigma_x|_{x-dx})dydz + (\tau_{yx}|_{y+dy} - \tau_{yx}|_{y-dy})dx dz + (\tau_{zx}|_{z+dz} - \tau_{zx}|_{z-dz})dx dy$$

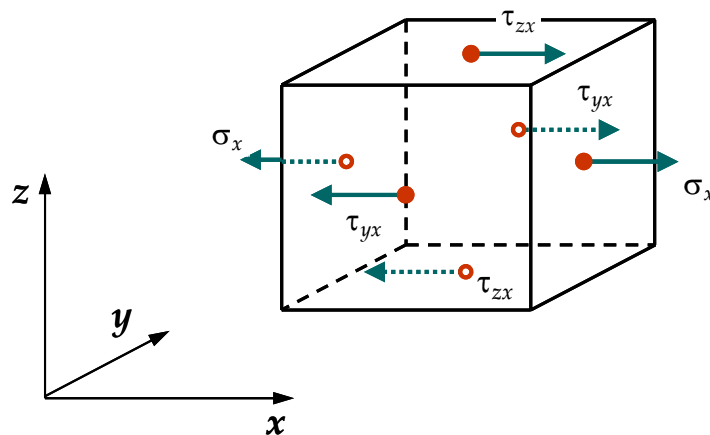


Figura 6.4: Volume infinitesimo, sollecitazioni agenti lungo la direzione x

Tramite sviluppo in serie di Taylor si ha:

$$\left(\sigma_x|_{x+dx} - \sigma_x|_{x-dx}\right)dy dz = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$\left(\tau_{yx}|_{y+dy} - \tau_{yx}|_{y-dy}\right)dx dz = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz$$

$$\left(\tau_{zx}|_{z+dz} - \tau_{zx}|_{z-dz}\right)dx dy = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy$$

Da cui

$$[dF_{sup}]_{dir-x} = \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) dx dy dz$$

E, ricordando che $\tau_{ii} = \sigma_{ii} - p$, e che $d\Omega = dx dy dz$

$$[dF_{sup}]_{dir-x} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\right] d\Omega$$

Che rappresenta una forza per unità di volume. Considerando anche quelle relative alle altre direzioni si ha

$$[dF_{sup}]_{dir-y} = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\right] d\Omega$$

$$[dF_{sup}]_{dir-z} = \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)\right] d\Omega$$

Sommando verticalmente le tre relazioni si ottiene

$$d\vec{F}_{sup} = [dF_{sup}]_{dir-x} \vec{i} + [dF_{sup}]_{dir-y} \vec{j} + [dF_{sup}]_{dir-z} \vec{k} = \left[-\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}\right] d\Omega \equiv \left[-p\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}\right] d\Omega$$

Equazione della Quantità di Moto in forma differenziale

La precedente insieme a $d\vec{F}_{grav} = \rho d\Omega \vec{g}$ possono essere sostituite nella espressione della equazione di conservazione della quantità di moto precedentemente ricavata

$$\rho d\Omega \frac{d\vec{V}}{dt} = d\vec{F}_{grav} + d\vec{F}_{sup}$$

E, dividendo per il volume infinitesimo, si ottiene la forma finale

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} + -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

Dove

$\rho \vec{g}$ forze gravitazionali, per unità di volume

$-\vec{\nabla}p$ forze normali di pressione, per unità di volume

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$ forze viscosi, per unità di volume

$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$ forze d'inerzia, per unità di volume

Si osservi come questa equazione sia molto simile a quella del moto di un fluido perfetto (nel quale non sono presenti gli sforzi viscosi), ricavata nel capitolo 2 e definita equazione di Eulero

$$-\vec{\nabla}p - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a}$$

6.4 L'equazione di Conservazione dell'Energia in forma differenziale.

Si è già ricavata nei precedenti paragrafi l'equazione della Conservazione dell'Energia per un volume di controllo finito, fisso e non deformabile

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega + \int_{CV} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W} \quad (6.3)$$

Dove con e si è indicata la somma di diverse energie specifiche associate al fluido: energia interna, energia cinetica, energia potenziale ed altre. Queste ultime saranno trascurate nel prosieguo. Si ha pertanto

$$e = \hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Il lavoro nell'unità di tempo ($\dot{W} = dW/dt$) indicato nella 6.3 è dovuto alla presenza di elementi che possono convertire energia meccanica in energia del fluido (e viceversa), ma anche alle diverse forze agenti sul volume di controllo, identificabili nelle forze di pressione e in quelle tangenziali

$$\dot{W} = \dot{W}_{sh} + \dot{W}_p + \dot{W}_\tau$$

Si ricordi che il lavoro di una forza applicata su un punto materiale in moto è data dal prodotto scalare della forza e del vettore velocità del punto. Ad esempio, considerando forze normali e tangenziali su una faccia del volumetto

$$d\dot{W}_p = (\vec{V} \cdot p\vec{n})dA$$

$$d\dot{W}_\tau = -(\vec{V} \cdot \tau\vec{t})dA$$

Nelle precedenti i segni sono opposti a quelli normalmente utilizzati a causa della convenzione qui utilizzata per il segno del lavoro. Inoltre, nelle ultime compaiono i versori rispettivamente delle direzioni normale e tangenziale in ogni punto della superficie di controllo, rispettivamente \vec{n} e \vec{t} . Sostituendo nella equazione integrale dell'energia si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega + \int_{CV} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}_{sh} - \dot{W}_\tau$$

Si può introdurre una funzione che tenga conto, oltre che dei termini già visti precedentemente, anche della energia di pressione del fluido

$$\xi = e + \frac{p}{\rho}$$

Se si suppone che il CV diventi infinitesimo, in esso non può essere scambiato lavoro meccanico. Ragionando come per l'equazione della quantità di moto, dopo alcuni passaggi si ha

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \xi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \xi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \xi) \right] dx dy dz = d\dot{Q} - d\dot{W}_\tau$$

Se si sviluppano i termini come fatto per le precedenti equazioni integrali si ottiene

$$\left(\rho \frac{de}{dt} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p \right) dx dy dz = d\dot{Q} - d\dot{W}_\tau$$

E, considerando le grandezze per unità di volume

$$\boxed{\rho \frac{de}{dt} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p = \dot{Q} - \dot{W}_\tau}$$

Questa è un'espressione generale della equazione dell'energia in forma differenziale e occorre, per le particolari applicazioni, esplicitare i termini che compaiono a primo membro.

Calore in ingresso nell'unità di tempo

Si consideri solo il calore trasmesso per conduzione attraverso le pareti del volume di controllo infinitesimo. Il flusso di calore per conduzione (calore trasmesso per unità di tempo e unità di superficie) è regolato dalla legge di *Fourier*

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T \Rightarrow \begin{cases} q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

dove:

k = coefficiente di conducibilità termica

T = temperatura assoluta

\vec{q} = vettore del flusso di calore per conduzione

Il flusso netto di energia termica attraverso la superficie del CV infinitesimo si ottiene anche in questo dalla somma dei contributi attraverso le varie facce, in ingresso ed in uscita. Procedendo in analogia a quanto fatto per le altre equazioni si ottiene il flusso netto di calore fornito al volume di controllo infinitesimo

$$d\dot{Q} = -\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dx dy dz = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) dx dy dz$$

Considerando le grandezze per unità di volume e ricordando la legge di *Fourier*, si ha

$$\dot{Q} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T) \quad 6.5$$

Lavoro delle forze viscosi nell'unità di tempo

Per quanto riguarda il lavoro delle forze viscosi, si può dimostrare che quello compiuto da tutte le componenti di sforzo dirette secondo l'asse x è dato da

$$d\dot{W}_\tau \Big|_x = -(\tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) dy dz$$

Con espressioni analoghe nelle altre direzioni coordinate. Se si considera il lavoro compiuto dalle forze viscosse nell'unità di tempo, su tutte le facce del CV infinitesimo, si ottiene

$$d\dot{W}_\tau = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w) \right] dx dy dz$$

La precedente può essere riscritta in forma compatta, dopo aver diviso per il volume infinitesimo

$$\dot{W}_\tau = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\tau}) \quad (6.6)$$

Sostituendo nella equazione dell'energia precedentemente ricavata, si ottiene la forma finale della **Equazione dell'Energia in forma Differenziale**

$$\rho \frac{de}{dt} + = \dot{Q} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\tau})$$

Il primo termine a primo membro è la variazione dell'energia vista dalla particella nel suo percorso (derivata Lagrangiana o sostanziale), per unità di volume: essa è dovuta ad un eventuale flusso termico per conduzione, al lavoro delle forze di pressione e a quello delle forze viscosse (per unità di volume).

6.5 Equazioni Fondamentali

Si riassumono di seguito le tre equazioni fondamentali per lo studio del moto dei fluidi, in forma vettoriale e tensoriale cartesiana (Appendice D):

CONTINUITA'

n°1 equazione scalare

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{Forma Vettoriale}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{Forma tensoriale Cartesiana}$$

QUANTITA' DI MOTO

n°1 equazione vettoriale → n°3 equazioni scalari

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

ENERGIA

n°1 equazione scalare

$$\rho \frac{de}{dt} = -p(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\tau})$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi_i$$

Quello appena scritto è un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali, in generale piuttosto complesso da risolvere. Ad esempio, per un gas comprimibile a comportamento ideale, occorre considerare anche le equazioni algebriche

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{Legge di stato dei gas}$$

$$\hat{u} = c_v T \quad \text{Relazione Energia interna-Temperatura}$$

Le equazioni a disposizione sono pertanto 7, poiché l'equazione vettoriale della Quantità di Moto corrisponde a 3 equazioni scalari.

Le variabili dipendenti, ovvero le incognite, sono le grandezze termofluidodinamiche: $p, \rho, u, v, w, \hat{u}, T, \tau_{ij}$, per un totale di 13. Esse devono essere determinate in funzione delle variabili indipendenti (x, y, z, t) .

Si evince che il problema matematico non è ben posto, poiché il numero di incognite è superiore a quello delle equazioni, e che il tutto è dovuto alla presenza delle variabili *tensioni tangenziali*. Si vedrà nel seguito come introdurre delle relazioni tra le tensioni tangenziali ed altre grandezze incognite, rendendo il problema risolvibile.

6.6 L'equazione del Momento della Quantità di Moto

Tra i dispositivi più comuni atti a trasferire energia al (o dal) fluido si considerano le cosiddette turbomacchine, o macchine dinamiche (Figura 6.5). Il fluido entra nella macchina attraverso la sua sezione d'ingresso (aspirazione), attraversa una girante (o rotore) in rotazione su un asse, e fuoriesce dalla macchina nella sua sezione d'uscita (mandata). Il principio di trasferimento di energia è quello della variazione del momento della quantità di moto del fluido tra monte e valle del rotore.

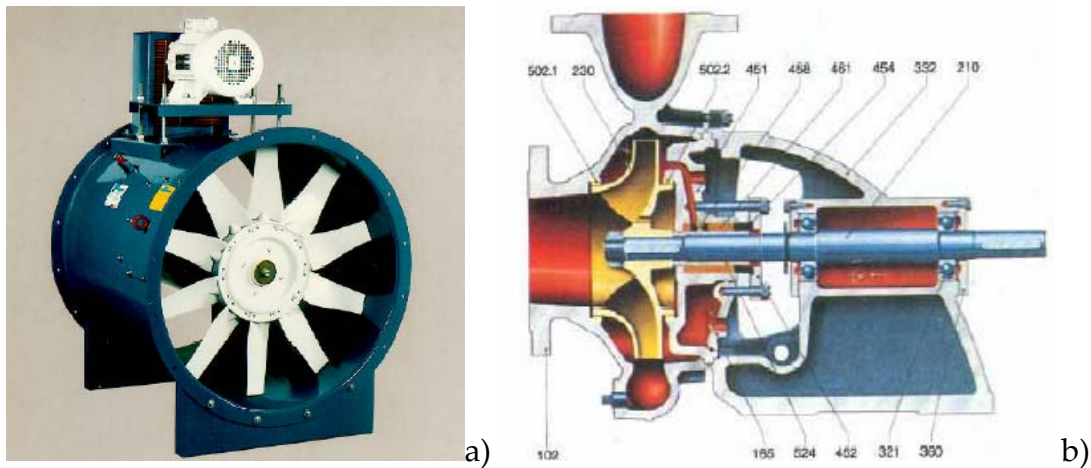


Figura 6.5: a) Turbomacchina assiale (ventilatore) e b) turbomacchina radiale (pompa)

E' importante utilizzare per le turbomacchine una equazione che risulti più pratica dell'equazione della quantità di moto.

Come detto, ogni turbomacchina è caratterizzata da un asse di rotazione. Indichiamo con \vec{r} il vettore posizione della particella che attraversa la girante, individuato in un sistema di coordinate inerziale avente origine in un punto dell'asse di rotazione della macchina (figura 6.6). Se moltiplichiamo vettorialmente per \vec{r} , ambedue i membri della seconda legge di Newton, si ottiene

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{V} \rho d\Omega) = \vec{r} \times d\vec{F}_{particella}$$

o, anche

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times (\vec{V} \rho d\Omega)] = \vec{r} \times d\vec{F}_{particella}$$

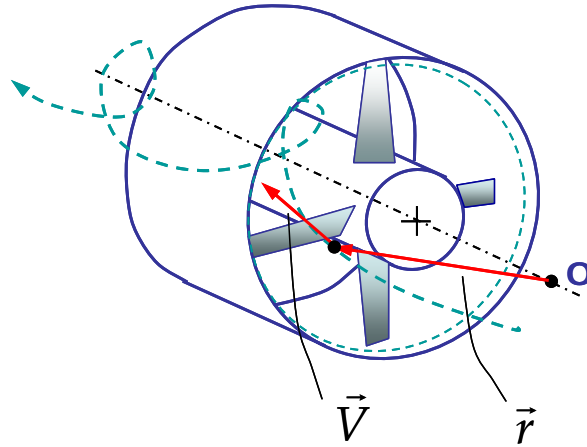


Figura 6.6: Turbomacchina assiale. Sono riportati per una particella fluida in ingresso alla girante, il vettore posizione \vec{r} e quello della velocità assoluta \vec{V} .

Ricordando che

$$\frac{d}{dt} [(\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} \rho d\Omega + \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{V} \rho d\Omega)$$

e che la derivata totale del vettore posizione è la velocità del punto materiale considerato, cioè $d\vec{r}/dt = \vec{V}$, si ha $d\vec{r}/dt \times \vec{V} = 0$. Pertanto

$$\frac{d}{dt} [(\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega] = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{V} \rho d\Omega) = \vec{r} \times d\vec{F}_{particella}$$

Integrando per un generico *sistema*, ovvero un insieme di particelle fluide ben definite, si ottiene

$$\int_{sys} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega = \sum_{sys} (\vec{r} \times \vec{F})_{sys}$$

Invertendo l'ordine di integrazione e derivazione si ottiene la seguente relazione, dedotta dalla seconda legge della dinamica

$$\frac{d}{dt} \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega = \sum_{sys} (\vec{r} \times \vec{F})_{sys}$$

Ovvero, la variazione del momento della quantità di moto di un sistema fluido è uguale alla somma dei momenti delle forze applicate al sistema.

Per passare dalla precedente equazione, scritta per il sistema, ad una più utile relativa al volume di controllo, si consideri il Teorema di Trasporto di Reynolds per un volume di controllo fisso e non deformabile, relativamente alla grandezza intensiva $b = \vec{r} \times \vec{V}$

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{sys}} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Ricordando che nell'istante considerato il sistema si suppone coincidente col CV si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho d\Omega + \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{CV}}$$

Questa appena ottenuta è l'equazione del Momento della Quantità di Moto per un volume di controllo fisso e non deformabile.

6.7 L'equazione di Eulero per le Turbomacchine

Si suppongano valide le seguenti ipotesi, che permettono di ottenere una relazione semplificata ma utile nelle applicazioni:

- 1 flusso monodimensionale: tutte le grandezze sono uniformi nella sezioni d'ingresso e d'uscita del CV;
- 2 flusso stazionario (o stazionario in media): le derivate locali in funzione del tempo sono nulle;
- 3 si considera la sola componente del momento lungo l'asse di rotazione della macchina;

La prima ipotesi viene applicata al caso di macchina assiale (vedi figura 6.7) considerando una unica linea di flusso che passi per il raggio medio della girante.

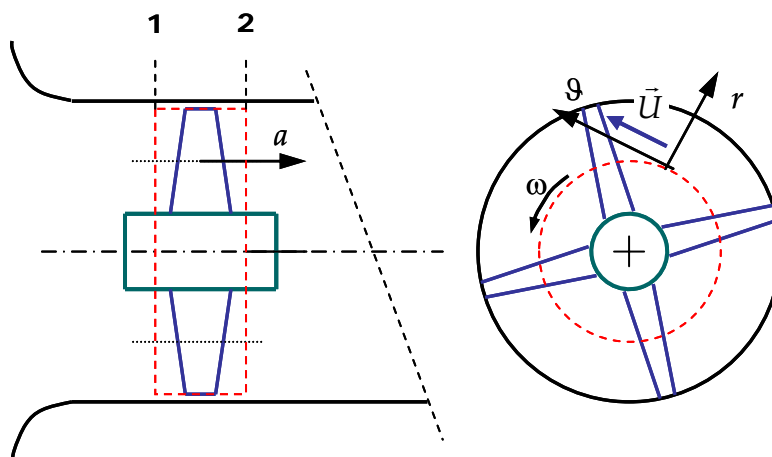


Figura 6.7: Turbomacchina assiale, volume di controllo, sezioni di ingresso ed uscita e definizione del sistema di riferimento utilizzato.

I triangoli di velocità possono pertanto essere valutati su uno sviluppo piano della superficie cilindrica sulla quale passa la linea di flusso considerata, chiamato schiera piana di pale (figura 6.8)

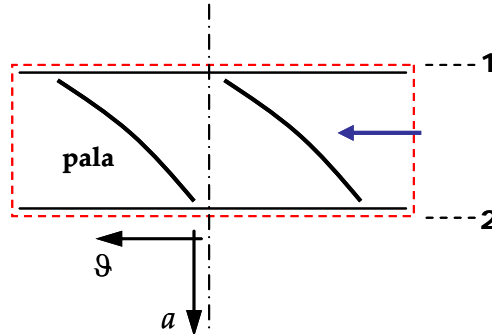


Figura 6.8: Turbomacchina assiale, sviluppo piano del VC e delle tracce delle pale.

Nel caso di turbomacchina radiale l'ipotesi di monodimensionalità impone che nelle sezioni di ingresso ed uscita i valori delle grandezze vettoriali e scalari siano uniformi. Ciò si traduce ancora nel considerare un'unica linea di flusso che rappresenti grandezze medie (figura 6.9)

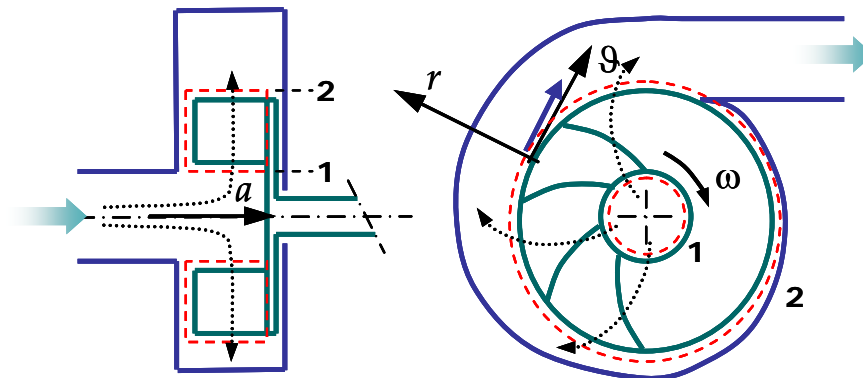


Figura 6.9: Turbomacchina radiale, volume di controllo, sezioni di ingresso e d'uscita e sistema di riferimento utilizzato.

Con le due prime ipotesi l'equazione del Momento della QM diventa

$$(\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) A \Big|_1^2 = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{cv}$$

dove con 1 e 2 si sono indicate, rispettivamente, le sezioni d'ingresso e d'uscita della macchina.

Considerando la sola componente del momento lungo l'asse della macchina (terza ipotesi), il primo termine della precedente equazione diventa

$$\left[(\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) A \right]_{1, assiale}^2 = (\pm r_2 V_{g,2} \dot{m}_2) - (\pm r_1 V_{g,1} \dot{m}_1)$$

Oltre a ricordare che con l'ipotesi di flusso stazionario la portata massica è comunque costante nelle sezioni d'ingresso e d'uscita, si osservi che i segni sono dettati dalla presenza del prodotto scalare, mentre l'unica componente che dà contributo al prodotto vettoriale è quella tangenziale. Si riporta la simbologia delle equazioni:

r_1 = raggio della macchina nella sezione d'ingresso;

r_2 = raggio della macchina nella sezione d'uscita;

\dot{m} = portata massica costante tra ingresso e uscita;

$V_{g,1}$ = componente tangenziale lungo \vec{U} (velocità periferica) della velocità assoluta all'**ingresso** del volume di controllo.

$V_{g,2}$ = componente tangenziale lungo \vec{u} della velocità assoluta all'**uscita** del volume di controllo

Come riportato nelle figure, i sistemi di riferimento sono caratterizzati da:

- a , direzione assiale, parallela all'asse della macchina;
- r , direzione radiale, positiva uscente;
- θ , direzione tangenziale, diretta come il vettore $\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, velocità di trascinamento, che caratterizza le parti della girante.

Il termine a secondo membro dell'equazione del Momento della QM rappresenta il momento risultante delle forze esterne. Data la simmetria del sistema rispetto all'asse di rotazione, le componenti lungo le direzioni diverse dall'asse di rotazione sono trascurabili. Considerando la componente lungo l'asse di rotazione si può scrivere

$$\sum [(\vec{r} \times \vec{F})_{CV}]_{assiale} = -T_{shaft}$$

che rappresenta la coppia risultante applicata sull'asse (albero, *shaft*) della macchina e dove il segno meno deriva dalla convenzione utilizzata per il lavoro.

Tenendo conto di ciò si ha

$$(\pm r_2 V_{g,2} \dot{m}_2) - (\pm r_1 V_{g,1} \dot{m}_1) = -T_{shaft}$$

La potenza scambiata dalla macchina è ottenibile moltiplicando la coppia applicata per la velocità angolare di rotazione della macchina ω

$$-\dot{W}_{shaft} = -T_{shaft} \omega = (\pm r_2 V_{g,2} \dot{m}_2 \omega) - (\pm r_1 V_{g,1} \dot{m}_1 \omega)$$

o, poiché $U = \omega r$ e \dot{m} è costante in ingresso ed uscita

$$-\dot{W}_{shaft} = \dot{m} [(\pm U_2 V_{\theta,2}) - (\pm U_1 V_{\theta,1})]$$

Per cui l'equazione che esprime il lavoro specifico diventa

$$-\dot{w}_{shaft} = -(\pm U_{in} V_{\theta,in}) + (\pm U_{out} V_{\theta,out})$$

definita EQUAZIONE DI EULERO PER LE TURBOMACCHINE.

6.8 Un'altra forma dell'Equazione dell'Energia

Si è precedentemente studiata l'equazione di conservazione dell'energia per un volume di controllo fisso e non deformabile

$$\dot{Q} - \dot{W}_{sh} - \dot{W}_\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega + \int_{CS} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Si ricordano ancora le convenzioni di segno da considerare per i flussi netti di lavoro e calore sul Volume di Controllo (Figura 6.10).

- Il lavoro è considerato positivo se ceduto dal Volume di Controllo verso l'esterno;
- Il calore è considerato positivo se dato dall'esterno al Volume di Controllo

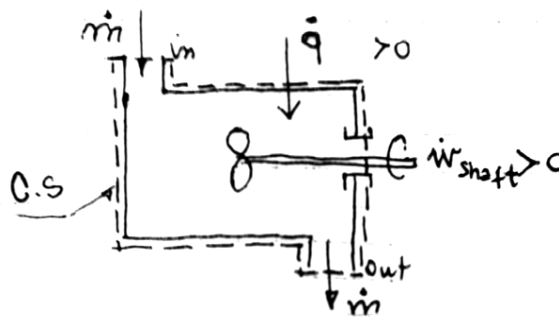


Figura 6.10. Convenzione di segno per lavoro e calore scambiati

Ad esempio, le turbine (macchine motrici) rendono disponibile verso l'esterno del lavoro utile e per esse è $w_{shaft} > 0$. Per compressori, pompe e ventilatori (macchine operatrici), che richiedono energia dall'esterno e la cedono al fluido, si ha $w_{shaft} < 0$.

In generale, nella precedente equazione si può scegliere una CS tale che il lavoro delle forze viscosse sia trascurabile, cioè $\dot{W}_\tau \approx 0$ (vedi Appendice 6.B).

Se ricordiamo l'espressione della energia interna totale, e , e introduciamo la funzione di stato *Entalpia*, $h = \hat{u} + p/\rho$, la precedente diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega + \int_{CS} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}_s$$

Se inoltre supponiamo valida l'ipotesi di flusso stazionario,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e d\Omega = 0$$

Con l'ulteriore ipotesi di flusso monodimensionale

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_{out} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m} - \sum_{in} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}$$

Dividendo per la portata massica, eguale all'ingresso ed all'uscita per l'ipotesi di stazionarietà del flusso, si ha

$$\dot{q} - \dot{w}_s = - \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{in} + \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{out} = -h_0|_{in} + h_0|_{out}$$

La quantità $h_0 = h + V^2/2 + gz$ è definita *Entalpia totale*. Per un flusso isentropico e fluido perfetto, in assenza di scambi di lavoro e calore si ha $h_0 = \text{cost}$.

La precedente è l'**Equazione dell'Energia in forma Termica**, valida per flussi comprimibili e incomprimibili, sotto le uniche ipotesi di flusso monodimensionale e stazionario. L'equazione può essere riordinata in una forma più pratica per risolvere i flussi comprimibili

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} (\Delta h_{(out-in)} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)})$$

con i simboli che rappresentano rispettivamente la differenza tra ingresso e uscita dell'entalpia, dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, tutte riferite all'unità di massa

$$\Delta h_{(out-in)} = h_{out} - h_{in}; \quad \Delta e_{c(out-in)} = \frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2}; \quad \Delta e_{g(out-in)} = g(z_{out} - z_{in})$$

L'equazione dell'energia si può anche scrivere in una forma applicabile al caso di flussi reali incomprimibili, in presenza di macchine, ad esempio il flusso nei condotti. Per ottenerla si consideri la forma termica dell'equazione dell'energia nel caso di flusso stazionario

$$\int_{CS} \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}_s$$

Nel caso di flusso monodimensionale e incomprimibile essa diventa

$$\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{in}^{out} = \dot{Q} - \dot{W}_{sh} - \dot{m}(u)_{in}^{out}$$

Si può dimostrare che nel caso di flussi reali la quantità $\dot{Q} - \dot{m}(u)_{in}^{out}$ è sempre minore di zero, e rappresenta le perdite di energia utile a causa degli effetti della viscosità. Pertanto, indicando tale termine con $-\dot{W}_{losses}$ e dividendo per la

portata massica, si ottiene l'**Equazione dell'Energia in forma Meccanica** nelle ipotesi di flusso reale (in presenza di perdite, *losses*), monodimensionale, stazionario e incomprimibile

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{in}^{out} = -w_{sh} - w_{losses}$$

Nel caso di flussi comprimibili (vedi Appendice 6.A) l'equazione diventa

$$-w_{shaft} = \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)} + w_{losses}$$

Si osservi come una macchina operatrice ($-w_{shaft} > 0$) effettui un lavoro che contribuisce all'incremento di pressione, all'aumento di energia cinetica e potenziale del fluido, ma anche a sopperire alle irreversibilità ($w_{losses} > 0$) della trasformazione reale.

6.9 Confronto tra l'Equazione dell'Energia e l'Equazione di Bernoulli

L'Equazione di Bernoulli applicata a un Volume di Controllo è valida con le seguenti ipotesi:

- fluido ideale (viscosità nulla)
- flusso stazionario
- flusso incomprimibile
- flusso monodimensionale (unica linea di corrente)

$$p_{out} + \rho \frac{V_{out}^2}{2} + \gamma z_{out} = p_{in} + \rho \frac{V_{in}^2}{2} + \gamma z_{in}$$

oppure, in termini di energie specifiche

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in}$$

L'Equazione dell'Energia in Forma Meccanica applicata a un Volume di Controllo è valida con le seguenti ipotesi:

- flusso reale
- flusso stazionario
- flusso comprimibile
- flusso monodimensionale nelle sezioni di ingresso e uscita

$$-\dot{w}_{sh} - \dot{w}_{losses} = \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)}$$

Nelle ulteriori ipotesi di flusso incomprimibile ($\rho = \text{cost}$) e assenza di lavoro utile $\dot{w}_{sh} = 0$

$$\frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} - \dot{w}_{losses}$$

Ricordando che si ha $\dot{w}_{losses} = 0$ per flussi privi di attrito mentre è $\dot{w}_{losses} > 0$ per flussi reali, si possono dedurre le evidenti analogie tra l'equazione di Bernoulli e quella dell'energia precedentemente scritta.

L'equazione dell'energia in forma meccanica è inoltre importante perchè permette di studiare una grande categoria di macchine idrauliche (pompe, turbine idrauliche) ed in generale il flusso nei condotti, sotto le seguenti ipotesi:

- flusso monodimensionale
- flusso incomprimibile ($\rho = \text{cost}$)
- flusso stazionario

Appendice 6.A: Equazione dell'Energia in forma Meccanica

Dalla seconda Legge della Termodinamica, per una trasformazione termodinamica ciclica reale, ricordando l'espressione della funzione di stato Entropia, S ($dS = (dQ/T)_{rev}$), si ottiene

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{in}^{out} \frac{dQ}{T} \leq (S_{out} - S_{in}) = \dot{m}(s_{out} - s_{in})$$

da cui, per una trasformazione reale infinitesima, $dQ \leq T dS$.

Dalla prima Legge della Termodinamica, per una trasformazione ideale, si ottiene $T ds = dq = dh - dp/\rho$. Confrontando una trasformazione reale e una ideale tra gli stessi punti estremi si ha

$$dq_r \leq dq_{id} = dh - dp/\rho$$

Integrando nella suddetta trasformazione si può scrivere

$$q_r \leq \Delta h_{out-in} - \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho}$$

Dalla equazione dell'energia in forma termica si ha

$$\dot{q} = \dot{w}_{shaft} + \Delta h_{(out-in)} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)}$$

pertanto, per la trasformazione reale

$$\dot{w}_{shaft} + \Delta h_{(out-in)} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)} \leq \Delta h_{out-in} - \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho}$$

Si ha dunque

$$-\dot{w}_{shaft} \geq \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)} + \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho}$$

affinché sia verificata l'eguaglianza occorre sottrarre a primo membro una quantità che tenga conto delle irreversibilità ($w_{losses} \geq 0$):

$$-\dot{w}_{shaft} - \dot{w}_{losses} = \int_{in}^{out} \frac{dp}{\rho} + \Delta e_{c(out-in)} + \Delta e_{g(out-in)}$$

Che rappresenta l'equazione dell'energia in forma meccanica per un flusso stazionario, monodimensionale e comprimibile.

Appendice 6.B: Sforzi di taglio per i flussi interni

Se consideriamo il flusso in un condotto, come mostrato in Fig. 6.11, il lavoro fatto dagli sforzi tangenziali è espresso dalla formula seguente

$$d\dot{W}_{\text{tang}} = d\vec{F}_{\text{tang}} \cdot \vec{V}$$

Per la superficie di controllo indicata in Fig. 6.11 la velocità della particella di fluido è nulla dappertutto sulla superficie interna bagnata del tubo. Pertanto sarà nullo anche il contributo di lavoro degli sforzi tangenziali sulla parete.

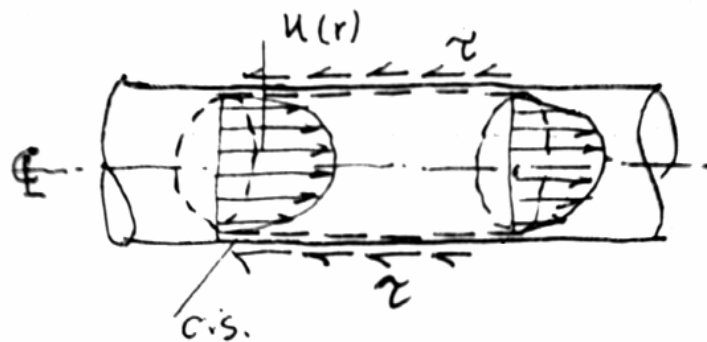


Fig. 6.11: Flusso in un condotto. Sforzi tangenziali sulla parete interna

La figura 6.12 mostra inoltre che dove il fluido attraversa la superficie di controllo del condotto (sezioni d'ingresso e di uscita), la forza tangenziale è perpendicolare alla velocità della particella di fluido e quindi il lavoro fatto dagli sforzi tangenziali è ancora nullo su tali superfici. In conclusione, per un condotto fermo attraversato da un flusso gli sforzi tangenziali non compiono lavoro su una superficie del volume di controllo opportunamente scelta.

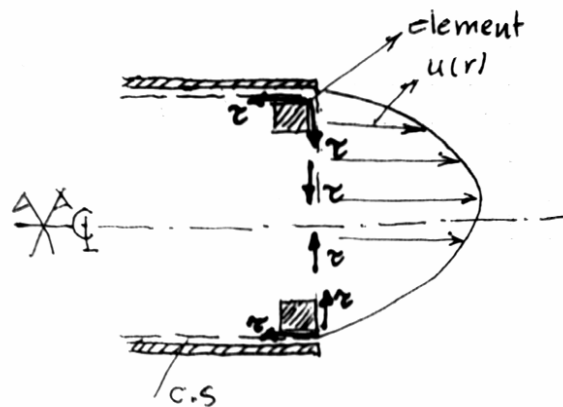


Fig. 6.12: Flusso in un condotto. Sforzi tangenziali sulla sezione d'uscita