CAPITOLO 5: EQUAZIONI DI BILANCIO DI UN VOLUME DI CONTROLLO FINITO

5.1. Conservazione della Massa o Equazione di Continuità.

Ricordando la forma generale del Teorema di Trasporto di Reynolds:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho b \delta \upsilon + \int_{CS} \rho b \vec{V} \bullet \vec{n} dA$$

In questo caso si ha:

$$b = \frac{dB}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

da cui:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho \delta \upsilon + \int_{CS} \rho \vec{V}_r \bullet \vec{n} dA = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho \delta \upsilon + \int_{CS} \rho \vec{V}_r \bullet \vec{n} dA = 0$$

Questa è *l'equazione generale di conservazione della massa* in forma integrale, valida per i fluidi reali, non stazionari e comprimibili o E*quazione di continuità* per un volume di controllo deformabile.

Nota:

Se il volume di controllo è fisso e non deformabile, l'equazione diventa:

$$\boxed{\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta \upsilon) + \int_{CS} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} dA = 0}$$

Nel caso in cui $V_{cv}=0$

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_{c\upsilon} = \vec{V}_r$$

5.2. Conservazione della quantità di moto.

Ricordando la forma generale del Teorema di Trasporto di Reynolds:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho b \delta\upsilon + \int_{CS} \rho b \vec{V} \bullet \vec{n} dA$$

e applicando la seconda legge di Newton

$$\sum \vec{F}_{sys} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)_{sys}}{dt}$$, ponendo $B = mb = m\vec{V}$, si ottiene:

$$\frac{d(m\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{cv} \rho \vec{V} \delta\upsilon\right) + \int_{cs} \rho \vec{V}(\vec{V} \bullet \vec{n})dA = \sum \vec{F}_{cv}$$

dove:

$$\sum \vec{F}_{cv} = somma\ vettoriale\ di\ tutte\ le\ \ forze\ che\ agiscono\ sul\ volume\ di\ controllo$$

5.3. Equazione dell'energia

Scrivendo il principio di conservazione dell'energia in forma differenziale

$dQ = dE + dW$;se $B = mb \Rightarrow E = me$, applicando il T. di T. di R. si avrà:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{cv} \rho e \delta\upsilon\right) + \int_{CS} \rho e(\vec{V}_r \bullet \vec{n})dA$$

dove:

$$e = e_{interna} + e_{cinetica} + e_{potenziale} + e_{altre} = \text{energia specifica}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{cv} \rho e \delta\upsilon\right) + \int_{CS} \rho e(\vec{V}_r \bullet \vec{n})dA}$$

Nota

Q positivo indica che il calore è ceduto al sistema all'esterno;
W positivo indica che il lavoro è compiuto dal sistema verso l'esterno.
