CAPITOLO 4. Il TEOREMA DI TRASPORTO DI REYNOLDS

4.1 Il Teorema di Trasporto di Reynolds

Le leggi di conservazione della Massa, della Quantità di Moto (*Momentum*) e dell'Energia costituiscono le relazioni di base della Fluidodinamica. Esse si ricavano applicando alcuni principi fisici fondamentali ad una parte del fluido in studio (il Sistema), sia in termini finiti che infinitesimi. La forma finita o integrale, applicata ad una porzione di spazio scelta in maniera opportuna (il Volume di Controllo), permette di ottenere le equazioni da utilizzare per la risoluzione degli esercizi in casi di flussi più o meno semplici. La forma differenziale porta invece alle equazioni alle derivate parziali che reggono i moti fluidi più generali. Al fine di procedere nel discorso è necessario premettere le seguenti definizioni:

Definizione di Sistema

Il Sistema è una quantità di fluido avente una ben determinata identità, che pertanto deve considerarsi come composto sempre dalle stesse particelle fluide, e che può muoversi, deformarsi, e interagire con l'ambiente esterno.

Una immediata conseguenza della precedente definizione deriva dall'applicazione al Sistema del principio fisico di conservazione della massa:

Durante l'evoluzione del Sistema, la sua massa si mantiene costante

Definizione di Volume di Controllo

Il Volume di Controllo è un volume individuato nello spazio, scelto in maniera completamente arbitraria. E' un'entità geometrica indipendente dalla massa, e con un volume che può essere fisso, mobile, indeformabile o deformabile.

Attraverso la Superficie di controllo, che avvolge il Volume di controllo, il fluido può fluire (entrare o uscire). Come si deduce dalle definizioni, nel caso più generale il Volume di Controllo (*Control Volume*, CV) può contenere masse diverse di fluido in istanti diversi. Per esigenze di semplificazione, in taluni casi il CV verrà considerato a volume costante e fisso nello spazio, oppure a volume costante e in movimento rispetto ad un osservatore assoluto.

L'introduzione delle due diverse entità, Sistema e Volume di Controllo, è associata alla difficoltà che si ha nello studio del moto dei Fluidi di identificare e monitorare sperimentalmente una ben definita porzione di fluido (Sistema) durante il suo movimento. Per esempio, non è possibile seguire così facilmente una specifica porzione d'acqua che fluisce in un fiume, come invece si può seguire un oggetto solido, ad esempio un ramo, che galleggia sulla sua superficie [Munson], poiché mentre il fluido scorre è quasi impossibile identificare le particelle che costituiscono il sistema. Per rimuovere tale difficoltà è più conveniente, per lo studio del moto fluido, fissare la propria attenzione su uno specifico Volume di Controllo, del quale si definisce la forma e la posizione, e valutare le grandezze termofluidodinamiche del fluido in esso contenuto.

La relazione tra la variazione nel tempo delle proprietà del fluido che costituisce il Sistema e la variazione temporale di quelle del fluido contenuto nel Volume di Controllo è data dal Teorema di Trasporto di Reynolds, ed è analoga a quella che esiste tra la descrizione Langrangiana e quella Euleriana di un flusso.

Teorema di Trasporto di Reynolds

Consideriamo una generica variabile termofluidodinamica B riferita ad una determinata massa fluida, cioè tale che sia

$$B = b\, m = b(\rho\Omega)$$

dove

B è una variabile globale del fluido (Grandezza Estensiva);

m è la massa della porzione di fluido considerata;

b è il valore del parametro B per unità di massa (Grandezza Intensiva);

ρ è la densità del fluido, supposta costante;

Ω è il volume occupato dal fluido.

Esempi rappresentativi di grandezza estensiva di una porzione di fluido sono la sua massa totale, la sua quantità di moto totale, la sua energia totale etc., con immediata derivazione della grandezza intensiva corrispondente.

In termini differenziali, ovvero per una particella di massa δm

$$\delta B = b\, \delta m = b\, \rho \delta\Omega \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\delta B}{\delta m}$$

Il Sistema si può pensare composto da particelle di massa δm, pertanto

$$B_{Sys} = \lim_{\delta\Omega \to 0} \sum_i \delta B = \lim_{\delta\Omega \to 0} \sum_i b_i (\rho_i \delta\Omega_i) = \int_{sys} \rho b \, \mathrm{d}\Omega$$

Si definisce la derivata rispetto al tempo di una grandezza estensiva di un sistema fluido come

$$\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\int_{Sys} \rho b \, \mathrm{d}\Omega\right)}{\mathrm{d}t}$$

L'analoga derivata relativa alle particelle fluide contenute in Volume di Controllo (CV) è

$$\frac{\partial B_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial\left(\int_{CV} \rho b \, \mathrm{d}\Omega\right)}{\partial t}$$

Osservazione

Sebbene le due espressioni precedenti possano sembrare simili, l'interpretazione fisica, come si vedrà, è molto diversa. Se il Volume di Controllo e il Sistema in un certo istante coincidono, i due integrali relativi a *CV* e *Sys* coincidono. Le derivate temporali dei due integrali sono però diverse, in quanto fatte da punti di vista diversi (si noti la diversa notazione delle due derivate).

Come già anticipato, è più semplice ricavare le equazioni della fluidodinamica applicando ad un Sistema alcuni principi fisici fondamentali. Per altre esigenze, è più comodo riferire tali equazioni al Volume di Controllo. E' pertanto necessario mettere in relazione la derivata rispetto al tempo della generica proprietà *B* valutata sul Sistema, con la derivata rispetto al tempo della stessa grandezza valutata su una definita regione dello spazio (Volume di Controllo). Questa relazione sarà fornita dal cosiddetto **Teorema di Trasporto di Reynolds**.

4.2 Teorema di Trasporto di Reynolds per un CV fisso ed indeformabile

E' il caso più semplice, ma molto frequente in realtà, ed è relativo a un Volume di Controllo fisso e indeformabile, in un flusso quasi mono-dimensionale. Quest'ultima definizione si riferisce al fatto che la sezione del condotto varia lungo il suo sviluppo, che tutte le variabili termofluidodinamiche si considerano costanti sulla generica sezione, ma possono variare da una sezione all'altra.

Si consideri la Fig.4.2. In essa è riportato il Volume di Controllo, scelto opportunamente in modo che all'istante t coincida con il Sistema (in rosso nella figura). In nero è poi rappresentato il Sistema all'istante $t+\delta t$

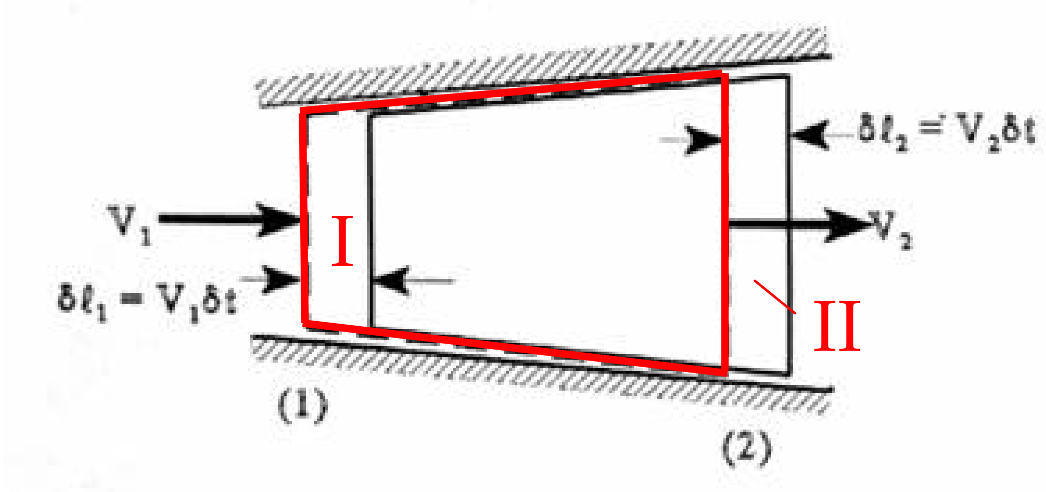

Fig. 4.2

Si osservi come il Sistema si muova nell'intervallo di tempo prescelto, come denotano gli spostamenti delle due sezioni (1) e (2)

$$V_i\,\delta t = \delta\ell_i \qquad A_i\,\delta\ell_i = \delta\Omega_i$$

Poiché al tempo t il *Sys* ed il *CV* coincidono, si ha

$$B_{sys}(t) = B_{cv}(t) \tag{4.1}$$

Al tempo $t+\delta t$, il *Sys* si è spostato nella nuova configurazione, mentre il *CV* è fisso. Osservando la figura 4.2, si può scrivere la relazione

$$B_{sys}(t+\delta t) = B_{cv}(t+\delta t) - B_I(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t)$$

Perciò la variazione di B del sistema, nell'intervallo di tempo δt è data da

$$\delta B_{sys} = B_{sys}(t+\delta t) - B_{sys}(t) = \left[B_{cv}(t+\delta t) - B_I(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t)\right] - B_{sys}(t)$$

Ricordando la (4.1) si ha

$$\delta B_{Sys} = B_{CV}(t+\delta t) - B_{CV}(t) - B_I(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t)$$

Dividendo per l'intervallo infinitesimo di tempo e passando al limite per $\delta t \to 0$, si ottiene

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta B_{sys}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{B_{CV}(t+\delta t) - B_{CV}(t)}{\delta t} - \frac{B_I(t+\delta t)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t+\delta t)}{\delta t}\right]$$

Il primo termine dentro la parentesi quadra è la derivata temporale della grandezza estensiva B riferita al Volume di Controllo, indicata col simbolo $\partial/\partial t$, in analogia con la derivata Euleriana.

Infatti, la derivata considerata è riferita ad un ben determinato Volume di Controllo, fisso nello spazio, e valuta le variazioni delle grandezze fluidodinamiche delle diverse particelle che transitano in esso. In cinematica si è visto che la derivata Euleriana è riferita alle variazioni delle grandezze relative alle diverse particelle che transitano in un determinato punto dello spazio.

$$\frac{\mathrm{d}B_{Sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} - \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_I(t+\delta t)}{\delta t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{II}(t+\delta t)}{\delta t}$$

Ricordando che $B = b\,m = \rho\, b\, \Omega$ e 4, si possono esplicitare i diversi termini che compaiono nella precedente relazione:

- ✓ derivata temporale, riferita al *CV*, della grandezza estensiva *B*

$$\frac{\partial B_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial\left(\int_{CV} \rho\, b\, \mathrm{d}\Omega\right)}{\partial t}$$

- ✓ flusso, o portata $\dot{B}_{in}$ della grandezza *B* in ingresso al Volume di Controllo

$$B_I(t+\delta t) = (\rho_1\, b_1)\,\delta\Omega_I = \rho_1\, b_1\, A_1\, V_1\, \delta t \qquad \to \qquad \dot{B}_{in} = -\lim_{\delta t \to 0} \frac{B_I(t+\delta t)}{\delta t} = -\rho_1\, b_1\, A_1\, V_1$$

- ✓ flusso, o portata $\dot{B}_{out}$ della grandezza *B* in uscita dal Volume di Controllo

$$B_{II}(t+\delta t) = (\rho_2\, b_2)\,\delta\Omega_{II} = \rho_2\, b_2\, A_2\, V_2\, \delta t \qquad \to \qquad \dot{B}_{out} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{II}(t+\delta t)}{\delta t} = \rho_2\, b_2\, A_2\, V_2$$

Combinando le ultime equazioni si ottiene la relazione che esprime il Teorema di Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}B_{Sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \rho_2\, V_2\, A_2\, b_2 - \rho_1\, V_1\, A_1\, b_1 \qquad = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \dot{B}_{out} + \dot{B}_{in}$$

Questa versione del Teorema di Trasporto di Reynolds è valida sotto le seguenti ipotesi restrittive

1 volume di controllo fisso;

2 flusso mono-dimensionale (cioè uniformità delle proprietà sulle sezioni d'ingresso e d'uscita del volume di controllo)

Si può generalizzare il Teorema considerando un flusso tridimensionale (3D), sempre con un Volume di Controllo fisso e indeformabile, come quello rappresentato schematicamente in figura 4.3.

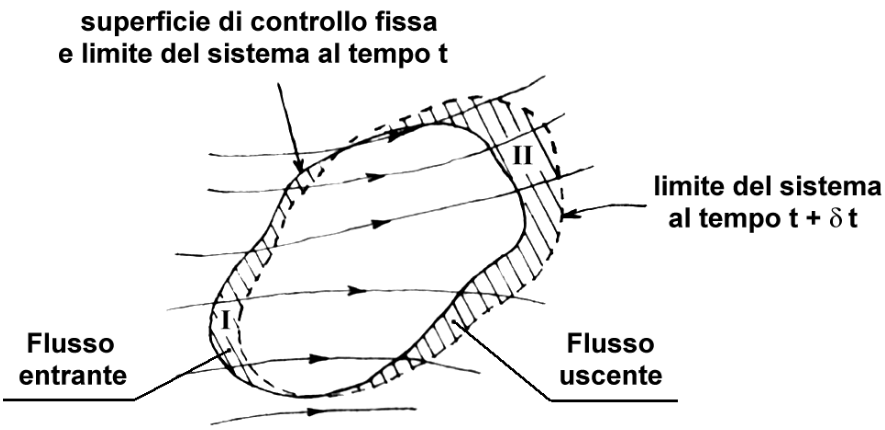

Figura 4.3

L'espressione del Teorema di Reynolds trovata precedentemente vale anche in questo caso più generale

$$\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \dot{B}_{out} + \dot{B}_{in} \qquad (4.2)$$

Si tratta di esprimere con la più ampia generalità i termini di flusso di B in ingresso e in uscita dal volume CV. Ciò verrà effettuato nel prossimo paragrafo.

Flusso in uscita da una superficie

Si consideri una generica porzione di superficie attraversata da un flusso, come rappresentato in figura 4.4. Il flusso si considera uscente se il vettore velocità ha componente nella direzione e verso del vettore normale alla superficie. Per una superficie chiusa si usa sempre la convenzione che il vettore normale punta verso l'esterno della superficie considerata.

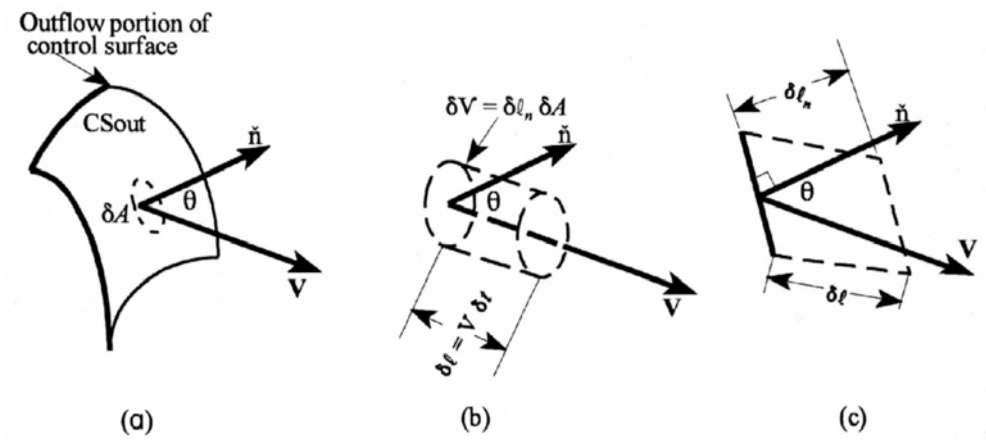

Figura 4.4

Dalla superficie infinitesima δA fuoriesce nel tempo δt il volume fluido tratteggiato in figura 4.4(b)

$$\delta\Omega = V\cos\theta\,\delta A$$

Pertanto, la portata della grandezza B in uscita attraverso l'elemento di area infinitesima δA è data da

$$\delta \dot{B}_{out} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho b \delta\Omega}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\rho b V \cos\theta\ \delta t)\delta A}{\delta t} = \rho b V \cos\theta\ \delta A$$

la quale, integrata sulla superficie d'uscita del flusso, permette di ottenere la portata totale, o flusso totale, della grandezza B attraverso la superficie CS_{out}

$$\dot{B}_{out} = \int_{CS_{out}} \mathrm{d}\dot{B}_{out} = \int_{CS_{out}} \rho b V \cos\theta\ \mathrm{d}A = \int \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n})\mathrm{d}A \tag{4.3}$$

Flusso in ingresso attraverso una superficie

In maniera analoga si procede per determinare il flusso in ingresso attraverso una generica porzione di superficie, rappresentata in figura 4.5

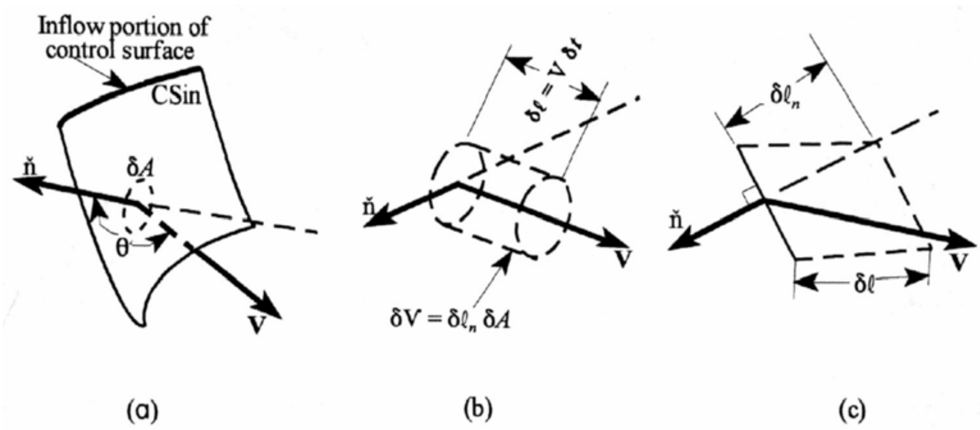

Figura 4.5

Si ha

$$\dot{B}_{in} = \int_{CS_{in}} \rho b V \cos\theta \mathrm{d}A = \int \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n})\mathrm{d}A \tag{4.4}$$

Tornando alla espressione 3D del Teorema di Trasporto di Reynolds, per un CV fisso ed indeformabile, il flusso netto della grandezza B attraverso una superficie chiusa CS è dato dalla somma dei suoi contributi in ingresso ed in uscita, ottenuti mediante le (4.3) e (4.4)

$$\dot{B}_{out} + \dot{B}_{in} = \int_{CS_{out}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A + \int_{CS_{in}} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A \quad = \int_{CS} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A$$

Inserendo questa espressione nella (4.2) si ha

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_{CV}}{\partial t} + \dot{B}_{out} + \dot{B}_{in} \quad = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho b \,\mathrm{d}\Omega\right) + \int_{CS} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A} \qquad (4.5)$$

che rappresenta l'espressione del Teorema di Trasporto di Reynolds per un flusso tridimensionale.

Osservazione

Poiché il Volume di Controllo è fisso, l'elemento di volume $\mathrm{d}\Omega$ non cambia e, nell'equazione (4.5), si può invertire l'ordine di derivazione ed integrazione

$$\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b \,\mathrm{d}\Omega) + \int_{CS} \rho b(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A$$

4.3 Teorema di Reynolds per un CV indeformabile in movimento

Se il Volume di Controllo è ancora a pareti indeformabili, ma si muove con una velocità relativa ***V_{CV}*** costante rispetto ad un riferimento inerziale (assoluto), un osservatore solidale con il Volume di Controllo osserverà il fluido attraversare la superficie del CV con una velocità relativa ***Vr***, legata alla precedente ed alla velocità assoluta dalla nota legge del moto relativo

$$\vec{V} = \vec{V}_{CV} + \vec{V}_r$$

- ✓ $\vec{V}$ è la velocità assoluta del flusso, valutata cioè rispetto ad un sistema di riferimento fisso;
- ✓ $\vec{V}_{CV}$ è la velocità di trascinamento del CV, cioè la velocità del Volume di Controllo rispetto al riferimento assoluto;
- ✓ $\vec{V}_r$ è la velocità relativa del flusso, cioè la velocità del flusso valutata rispetto al sistema di riferimento in moto con il CV.

Nell'ipotesi che la velocità $\vec{V}_{CV}$ si mantenga costante nel tempo, poiché il flusso attraverso una superficie *CS* in moto è determinato dalla velocità relativa con la quale il fluido la attraversa, il Teorema di Reynolds si modifica come di seguito riportato

$$\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho b \,\mathrm{d}\Omega\right) + \int_{CS} \rho b (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \mathrm{d}A$$

Osservazione:

Se il *CV* ha pareti indeformabili, e si muove con una velocità variabile in funzione del tempo $\vec{V}_{CV} = \vec{V}_{CV}(t)$, l'espressione del Teorema di Reynolds rimane la precedente con $\vec{V}_r(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{r},t) - \vec{V}_{CV}(t)$. La velocità relativa è quindi funzione della posizione spaziale (rappresentata dal vettore di posizione $\vec{r}$) e del tempo.

4.4 Teorema di Reynolds per un CV in moto e deformabile

La situazione più generale è quella in cui il Volume di Controllo si muova e si deformi in modo arbitrario. Anche in questo caso il flusso è determinato dalla componente normale della velocità relativa, $\vec{V}_r \cdot \vec{n}$. In ogni istante la velocità relativa è legata a quella assoluta e a quella di trascinamento dalla relazione

$$\vec{V}_r = \vec{V}(\vec{r},t) - \vec{V}_{CS}(\vec{r},t)$$

Dove, in questo caso, compare la velocità della superficie del CV, in quanto rispetto ad essa deve essere valutato il flusso. Questo introduce un'ulteriore difficoltà, dovuta al fatto che la superficie di controllo subisce una deformazione continua e la $\vec{V}_{CS}(\vec{r},t)$ è una funzione della posizione spaziale e del tempo. Con le osservazioni fatte, l'espressione più generale del Teorema di Reynolds ha la forma vista nel precedente paragrafo

$$\frac{\mathrm{d}B_{sys}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho b \, \mathrm{d}\Omega + \int_{CS} \rho b \left(\vec{V}_r \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}A$$

4.5 Significato Fisico del Teorema di Trasporto di Reynolds

Il Teorema di Trasporto di Reynolds stabilisce una relazione tra

- ✓ derivata temporale, fatta sul Sistema, della grandezza *B*;
- ✓ derivata temporale, fatta sul *CV*, della grandezza estensiva *B;*
- ✓ flussi di *B* attraverso la Superficie di Controllo.

Per ottenere le equazioni fondamentali della Fluidodinamica, la variabile *B* diventa rispettivamente massa, quantità di moto ed energia. Le equazioni che si otterranno applicando le leggi fondamentali ad un Volume di Controllo finito, sono dette in forma integrale. Quelle ottenute per un Volume di Controllo infinitesimo sono dette in forma differenziale, e sono rappresentate da equazioni alle derivate parziali.

Osservazione:

La forma in cui si presentano le equazioni ottenute da un Volume di Controllo fisso nello spazio, sia in forma integrale che alle derivate parziali, è detta **forma conservativa**.

La forma in cui si presentano le equazioni ottenute da un volume di controllo che si muove esattamente con le particelle fluide (quindi coincide con il Sistema), sia in forma integrale che differenziale, è detta **forma non conservativa**.