CAPITOLO 3. DINAMICA DEI FLUIDI PERFETTI

3.1 Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1700-1782) è una delle prime equazioni della Fluidodinamica. Se essa viene applicata rispettando correttamente le ipotesi restrittive, può essere usata per prevedere e analizzare una grande varietà di situazioni di flusso.

Ipotesi restrittive alla base della derivazione della Equazione di Bernoulli:

a. Il fluido è assunto con viscosità nulla ($\mu = 0$). Questo significa che pur essendoci scorrimento relativo tra le varie particelle fluide, non si ha dissipazione di energia per attrito. Inoltre, se la viscosità è nulla lo è anche la conduttività termica (k) del fluido, per cui non può esserci scambio termico per conduzione e per convezione, ma solo per irraggiamento. In tali condizioni si parla di *fluido perfetto*.
b. Il flusso è considerato stazionario, pertanto per ogni osservatore locale risultano costanti nel tempo le grandezze termofluidodinamiche

$$\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0$$

c. Per una derivazione più semplice delle equazioni, si considera un flusso definibile mediante solo due coordinate spaziali (flusso bidimensionale, 2D)

A causa della prima ipotesi il moto del fluido è governato solo dalle forze di pressione e da quelle di campo, generalmente quelle di gravità. La legge del moto è pertanto la seconda legge di Newton applicata a una particella del fluido di massa m nella forma

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e col significato fisico di

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{(Forze di pressione + Forza di gravità) agenti sulla particella} \\ = \\ \text{(Massa) x (Accelerazione) della particella}\end{array}}$$

Pur trascurando le forze viscose, i risultati della interazione fra forze di pressione, gravità e accelerazione forniscono utili informazioni per molte applicazioni in Fluidodinamica.

3.2 Scelta del sistema di riferimento

Solitamente è la specifica geometria del flusso a indicare quale sistema di coordinate sia più appropriato:

- Sistema di Coordinate *Rettangolari* (Cartesiane) (x, y, z);
- Sistema di Coordinate *Cilindriche* (ρ, ϑ, z);
- Sistema di Coordinate *Sferiche* (ρ, ϑ, φ).

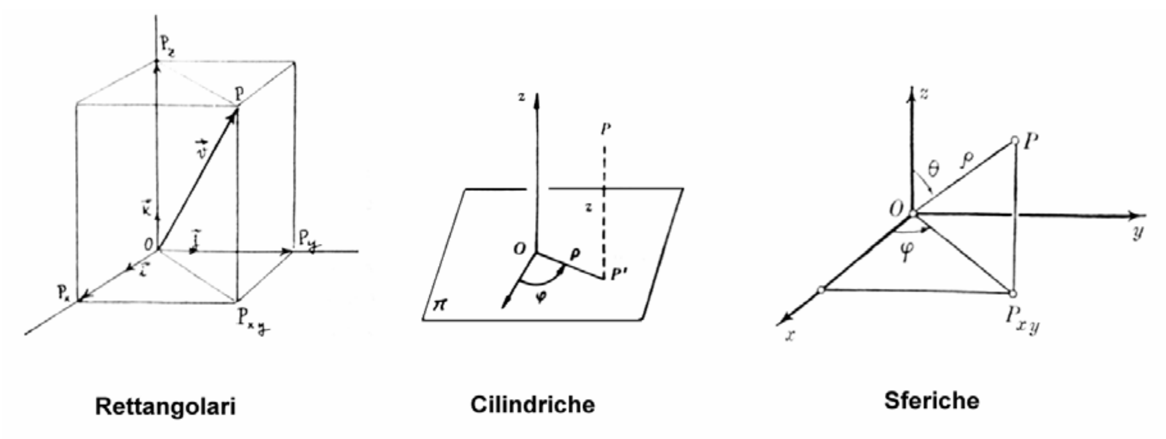

Figura 3.1: Sistemi di riferimento

Per la determinazione delle equazioni fondamentali dei fluidi perfetti è comunque più conveniente usare un sistema di coordinate definito in termini di linee di corrente (coordinate curvilinee).

3.3 Definizione di Linea di corrente, Linea di fumo e Linea di percorso (o traiettoria)

- una linea di corrente (o di flusso, *streamline*) di un dominio fluido in movimento è il luogo dei punti tali che il vettore velocità della particella fluida è tangente alla curva stessa;
- una linea di fumo (*streakline*) è costituita da tutte le particelle fluide che sono passate precedentemente in uno stesso punto dello spazio;
- Una linea di percorso (o traiettoria, *pathline*) è il luogo dei punti occupati da una stessa particella nel suo movimento.

Ricordando alcuni concetti di cinematica, si può osservare che per tracciare una linea di percorso occorre seguire una generica particella nel suo movimento, con quello che era stato definito il *punto di vista Lagrangiano*. Per disegnare una linea di corrente dobbiamo identificare alcuni punti spaziali fissi (*punto di vista Euleriano*) e definirne i vettori velocità. Il concetto di linea di fumo contiene, in un certo qual modo entrambi i punti di vista; è possibile materializzare una linea di fumo in un certo istante con una foto, inserendo opportuno traccianti colorati nel fluido.

Un sistema di coordinate molto utile per il prosieguo del discorso è quello che si ottiene disegnando nel dominio fluido diverse linee di corrente e le linee ad esse normali (vedi figura 3.2)

- Lungo una linea di corrente varia l'ascissa curvilinea s e rimane costante quella normale n; diverse linee di corrente hanno diversi valori di n;

- Lungo una linea normale alle linee di corrente varia la coordinata *n* e rimane costante *s*; diverse linee normali hanno diversi valori di *s*.

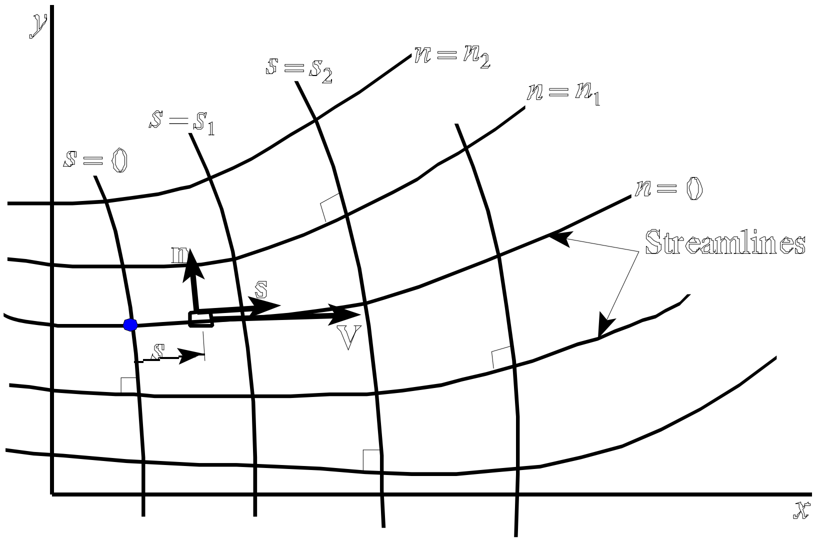

Figura 3.2: linee di flusso, linee normali alle linee di flusso e coordinate curvilinee

È da osservare che, in generale, le linee di flusso variano di posizione al variare del tempo, ma si può dimostrare che in un flusso stazionario linee di corrente, linee di fumo e traiettorie coincidono e sono fisse nello spazio. In tale situazione si può anche dire che

- la variabile *s* è rappresentativa dello spazio percorso lungo una linea di corrente; ogni particella, nel suo movimento, si muove su una sola linea di corrente e passa a valori sempre maggiori di *s*;
- La variabile *n* definisce lo spazio misurato nella direzione normale alle linee di corrente; ogni particella, nel suo movimento, mantiene un valore costante di *n*.

In ogni punto del flusso avremo una coppia di valori (*s*, *n*) che identificano univocamente la posizione spaziale. I valori non sono da confondere con i versori locali, cioè con la coppia di vettori di modulo unitario ($\vec{s}$, $\vec{n}$), in ogni punto tangenti rispettivamente alle linee di flusso ed a quelle normali. Poiché in qualunque punto del campo di flusso le direzioni s e n sono tra loro perpendicolari (anche se le linee s e n non sono necessariamente linee rette), i versori $\vec{s}, \vec{n}$ sono sempre normali tra loro.

Da quanto detto si evince che se il flusso è stazionario la velocità è funzione della sola posizione spaziale, definibile nel nuovo sistema di coordinate curvilinee, cioè

$$\vec{V}(s,n) = V(s,n)\ \vec{s}(s,n)$$

3.4 Accelerazione di una particella

Ci proponiamo di calcolare l'accelerazione di una particella in un sistema di coordinate curvilinee come quello di Fig. 3.2. Ricordando che $\vec{V} = \vec{V}(s,n)$ e che $\vec{s} = \vec{s}(s,n)$ si ottiene

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = a_s \vec{s} + a_n \vec{n} = \frac{\mathrm{d}(V\,\vec{s})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{s} + V\,\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}$$

Si ricordi che una generica particella varia la sua posizione, definita da s e n, al variare del tempo. Pertanto s e n sono funzioni del tempo e occorre ricordare la regola di derivazione delle funzioni composte; ad esempio per la velocità

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\big(s(t), n(t)\big) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$$

Sostituendo nella espressione della accelerazione si ha

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\right)\vec{s} + V\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{s}}{\partial n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\right)$$

Per un flusso stazionario, le derivate locali delle grandezze termofluidodinamiche sono nulle

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = 0$$

Inoltre, una generica particella fluida ha un valore costante di n nel suo moto lungo la linea di flusso:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=0$$

Pertanto

$$\vec{a}=\left(\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\vec{s}+V\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$$

La variazione dello spazio percorso nell'unità di tempo dalla particella rappresenta la sua velocità, cioè $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=V$. La precedente diventa:

$$\vec{a}=\left(V\frac{\partial V}{\partial s}\right)\vec{s}+V^2\frac{\partial \vec{s}}{\partial s}$$

Per poter scrivere un'espressione più funzionale della accelerazione, occorre definire la direzione, il verso e il modulo del vettore $\partial\vec{s}/\partial s$.

Raggio di curvatura locale

La traiettoria della particella, nell'intorno infinitesimo di un suo punto, può essere rappresentata con un tratto di circonferenza, caratterizzata pertanto dal raggio di curvatura locale **R**, come mostrato in figura 3.3.

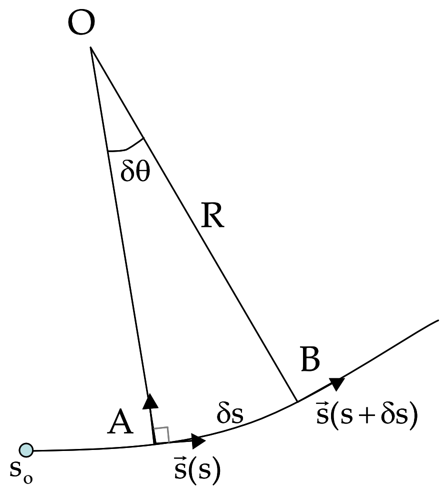

Figura 3.3: traiettoria e raggio di curvatura locale

In essa sono anche indicati i versori $\vec{s}$ in punti della traiettoria corrispondenti a due istanti successivi. Si noti che $\vec{s}$ è un versore (vettore di modulo unitario, quindi costante) ma la sua direzione varia se la linea di corrente è curva. Si supponga ora di trasportare i due versori nel punto A, come mostrato nella successiva figura 3.4, evidenziando anche il vettore differenza $\delta\vec{s} = \vec{s}(s+\delta s) - \vec{s}(s)$.

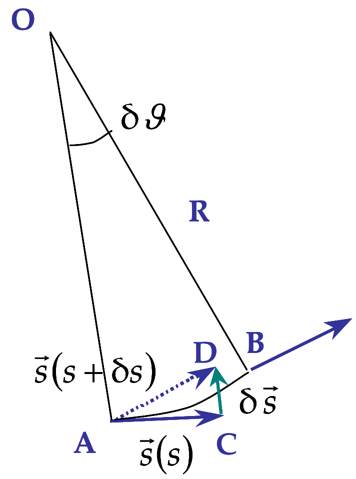

Figura 3.5: Vettore differenza dei due versori

Per quanto riguarda la direzione ed il verso del vettore $\delta\vec{s}$ (e quindi anche del vettore $\delta\vec{s}/\delta s$) si osservi come, passando al limite per $B \to A$, esso assuma la direzione AO, verso il centro di curvatura locale, e quindi la direzione del versore $\vec{n}$.

Per ricavare il modulo di $\delta\vec{s}/\delta s$, la similitudine dei triangoli OAB e ACD permette di scrivere la relazione

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \cong \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta s}{R} \cong \frac{|\delta\vec{s}|}{|\vec{s}(s)|} = \frac{|\delta\vec{s}|}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\delta\vec{s}|}{\delta s} \cong \frac{1}{R}$$

ovvero, passando al limite

$$\frac{\partial\vec{s}}{\partial s} = \lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\vec{s}}{\delta s} = \frac{\vec{n}}{R}$$

Quindi l'accelerazione di una particella fluida, per un flusso stazionario bidimensionale, può essere scritta in funzione delle componenti normale e tangenziale (lungo la linea di corrente), nella forma

$$\vec{a} = \left(V \frac{\partial V}{\partial s} \right) \vec{s} + \frac{V^2}{R} \vec{n}$$

Le due componenti possono anche essere indicate come

$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s}$ *accelerazione convettiva,* diretta lungo la linea di corrente (tangenziale), deriva dalla variazione in modulo di ***V*** lungo *s*

$a_n = \frac{V^2}{R}$ *accelerazione centripeta,* che ha direzione normale alla velocità del flusso, è orientata verso il centro di curvatura locale, e nasce ogni qualvolta la traiettoria non è rettilinea.

3.5 Seconda legge di Newton applicata lungo una linea di corrente

Per ottenere l'equazione di Bernoulli occorre proiettare l'equazione dell'equilibrio dinamico della particella lungo la tangente alla linea di flusso (direzione *s*).

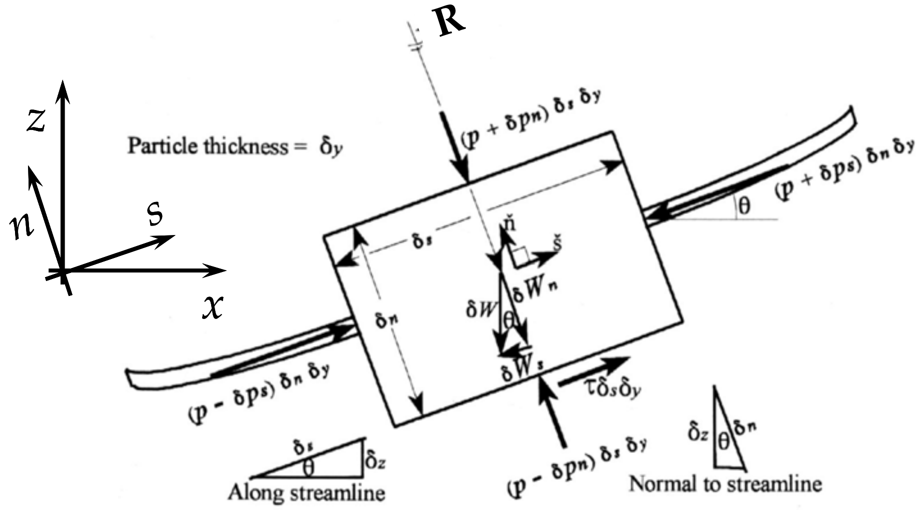

Figura 3.6: Particella fluida e forze applicate

Si consideri pertanto una particella come quella rappresentata in figura 3.6, avente dimensioni $(\delta s, \delta n)$ sul piano bidimensionale e spessore δy in direzione normale al piano del disegno. Ipotizzando sempre il flusso stazionario e ricordando la definizione di accelerazione di una particella, si ha

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{in direzione } s \qquad \Rightarrow \quad \sum \delta F_s = \delta m\, a_s = \delta m\, V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho \delta\Omega\, V \frac{\partial V}{\partial s}$$

dove $\delta\Omega = \delta s\ \delta n\ \delta y$. Questa equazione è valida sia per flussi *comprimibili* che *incomprimibili*, questi ultimi caratterizzati da densità costante in ogni punto del campo di moto.

Il termine $\sum \delta F_s$ esprime la somma delle componenti, lungo *s*, di tutte le forze agenti sulla particella, vale a dire la forza peso e le forze di pressione

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps}$$

Componente della forza peso

$\delta W_s = -\delta W \sin\theta = -\gamma\,\delta\Omega\,\sin\theta$

esprime la componente della forza peso lungo *s*, che si annulla se la linea di corrente è orizzontale nel punto interessato. Quando $\theta = 0$ non c'è alcuna componente della forza peso della particella che contribuisca alla sua accelerazione lungo la direzione *s*.

Componente delle forze di pressione

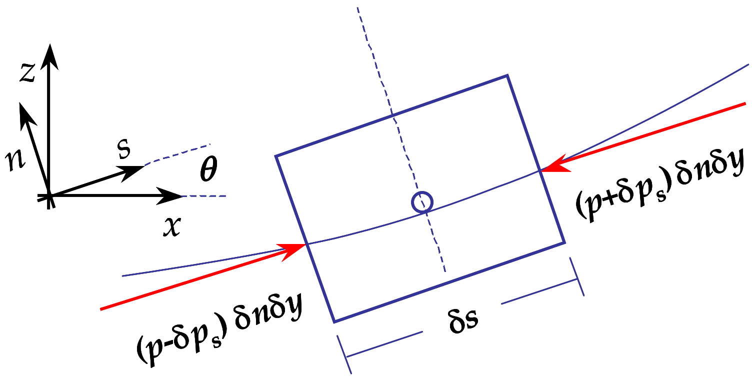

Figura 3.7: Particella fluida e forze di pressione lungo la direzione *s*

Per quanto riguarda il secondo termine, relativo alle forze di pressione agenti sull'elemento, osservando la figura 3.7 e ricordando lo sviluppo in serie di Taylor si ha

$$\delta p_s \cong \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\delta s}{2}$$

per cui la forza di pressione totale (o *netta*) in direzione *s* è data da

$$\begin{aligned}\delta F_{p_s} &= (p - \delta p_s)\,\delta n\,\delta y - (p + \delta p_s)\,\delta n\,\delta y \\ &= -2\,\delta p_s\,\delta n\,\delta y \cong -\frac{\partial p}{\partial s}\delta s\,\delta n\,\delta y\end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione del volume della particella

$$\delta F_{ps} = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta\Omega$$

Interpretazione fisica

E' importante osservare che la componente delle forza di pressione è dovuta al fatto che la pressione non è costante lungo la linea di corrente e non dipende dal valore locale che essa assume. Tale componente dipende quindi dal gradiente di pressione

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial s}\vec{s} + \frac{\partial p}{\partial n}\vec{n}$$

ed esiste solo quando quest'ultimo sia diverso da zero.

Componente della forza totale

Pertanto, la componente lungo la linea di corrente della forza totale agente sulla particella è data da

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta\Omega$$

Sostituendo la precedente nella espressione della legge di Newton lungo la linea di flusso si ottiene

$$-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

L'interpretazione fisica di questa equazione è che un cambiamento della velocità della particella di fluido è conseguenza del gradiente di pressione e/o della componente del peso della particella lungo la linea di corrente. La precedente si può ancora trasformare osservando che

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \qquad\qquad V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(V^2\right)}{\mathrm{d}s}$$

Inoltre, ricordando che lungo la linea di flusso $n = \text{cost} \Rightarrow \mathrm{d}n = 0$, il differenziale della pressione diventa

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)\mathrm{d}s + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)\mathrm{d}n = \frac{\partial p}{\partial s}\mathrm{d}s \;\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}$$

Le espressioni precedenti permettono di modificare la legge di Newton lungo la linea di flusso

$$-\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\rho \frac{\mathrm{d}\left(V^2\right)}{\mathrm{d}s}$$

Semplificando e riordinando si ottiene :

$$\boxed{\mathrm{d}p + \frac{1}{2}\rho \,\mathrm{d}\left(V^2\right) + \gamma \,\mathrm{d}z = 0}$$

che esprime la forma differenziale della *legge della dinamica dei fluidi perfetti* (comprimibili o incomprimibili), proiettata lungo direzione della tangente alla linea di flusso, con le ipotesi di flusso stazionario e bidimensionale.

Una forma più utile per le applicazioni è ottenibile integrando la precedente lungo una linea di corrente

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \mathrm{cost}}$$

Ipotizzando infine che il flusso sia *incomprimibile*, (ρ = costante dappertutto) si ottiene la nota EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \mathrm{cost}}$$

Si può dimostrare che essa è valida anche per flussi tridimensionali (3D), purché siano rispettate le ipotesi fatte durante la derivazione

1. Gli effetti viscosi sono assunti trascurabili $\mu = 0$
2. Il flusso è assunto stazionario $\partial(\;)/\partial t = 0$
3. Il flusso è assunto incomprimibile $\rho = \mathrm{cost}$
4. L' equazione è applicabile lungo una linea di corrente.

3.6 La seconda legge di Newton applicata lungo la Normale a una linea di corrente

Si considerino ancora le forze agenti sulla particella del fluido mostrata in Fig. 3.7 e si proietti questa volta l'equazione di Newton nella direzione *normale* alla linea di corrente

$$\sum \delta F_n = \delta m \, \frac{V^2}{R} = \rho \, \delta\Omega \frac{V^2}{R}$$

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente, si considerino le forze agenti nella direzione d'interesse

$$\sum \delta F_n = \delta W_n + \delta F_{pn}$$

Dove figurano la componente della forza peso lungo *n*

$$\delta W_n = \left(-\gamma \, \cos\theta\right)\delta\Omega$$

ed il contributo delle forze di pressione

$$\begin{aligned} \delta F_{pn} &= \left(p - \delta p_n\right)\delta_s \delta_y - \left(p + \delta p_n\right)\delta_s \delta_y = \\ &= -2\delta p_n \delta_s \delta_y \simeq -\frac{\partial p}{\partial n}\delta_s \delta_n \delta_y = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta\Omega \end{aligned}$$

avendo posto

$$\delta p_n \cong \frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial n}{2}$$

Trascrivendo le due componenti, la sommatoria delle forze agenti in direzione normale risulta espressa come

$$\sum \delta F_n = \left(-\gamma \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n}\right)\delta\Omega$$

cioè

$$\rho \, \delta\Omega \frac{V^2}{R} = \left(-\gamma \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n}\right)\delta\Omega$$

Ponendo

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,h}$$

si ottiene

$$\rho\frac{V^2}{R} = -\gamma\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,h} - \frac{\partial p}{\partial n}$$

Se ora si suppone di considerare un percorso lungo una normale alle linee di corrente, si deve considerare *s* come constante. Ciò determina

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,n} \qquad \Rightarrow \rho\frac{V^2}{R} = -\rho g\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,h} - \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,n}$$

Integrando su una normale alle linee di corrente (che può non essere una retta!) si ottiene quindi

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}\,p}{\rho} + \int\frac{V^2}{R}\mathrm{d}\,n + gz = \mathrm{cost}}$$

Per flussi *incomprimibili*, la precedente relazione, valida lungo la normale alla linea di corrente, si può scrivere in maniera più semplice

$$\boxed{\int\mathrm{d}\,p + \rho\int\frac{V^2}{R}\mathrm{d}\,n + \gamma\,z = \mathrm{cost}}$$

Tale equazione, nota come *Equazione dell'Equilibrio Radiale semplificata*, può essere applicata tenendo presenti tutte le ipotesi fatte in precedenza.