

CAPITOLO 2: STATICA DEI FLUIDI

2.1 Pressione in un Punto (Legge di Pascal)

Consideriamo un fluido in quiete o in moto, tale che in esso non siano presenti spostamenti relativi tra particelle adiacenti. In tali condizioni nel fluido non è presente alcuno sforzo di taglio. Tale situazione è tipica delle seguenti tipologie di fluido o flusso:

- Fluidi reali in quiete
- Fluidi reali in moto come corpi rigidi
- Fluidi ideali (ovvero non viscosi) in quiete o in moto

In tali condizioni la forza di pressione agente su una superficie è diretta normalmente alla superficie stessa. È ora importante mostrare come cambi il valore della pressione in un punto del volume fluido, al variare della giacitura del piano sul quale essa agisce.

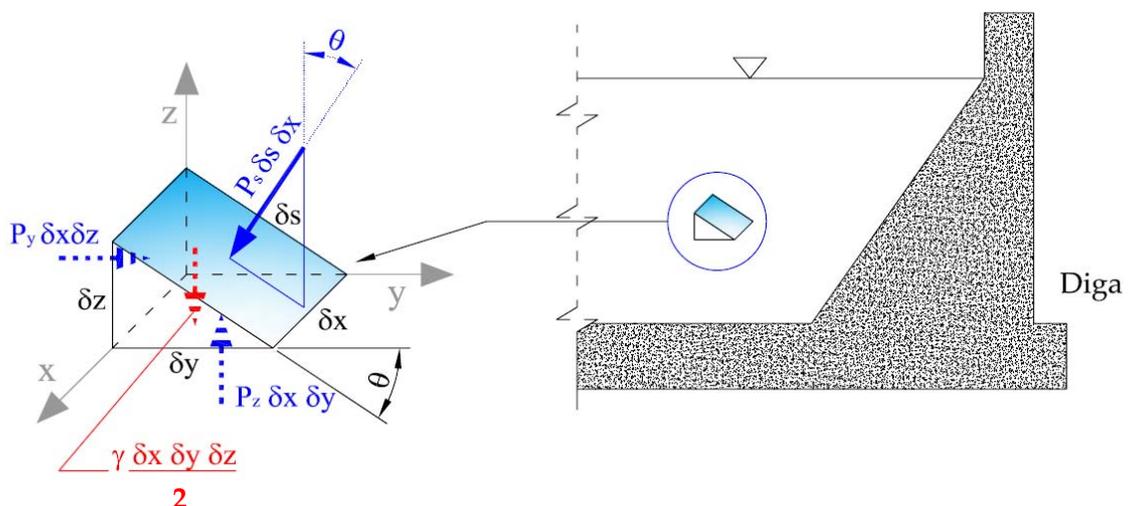


Figura 2.1 – Principio di Pascal: indipendenza della pressione dalla direzione

Per mostrare ciò, pensiamo ad un fluido fermo, contenuto in un serbatoio o bacino come quello mostrato in Figura 2.1. Consideriamo ora una porzione infinitesima del volume fluido, la cui forma sia un prisma a sezione triangolare, con la superficie corrispondente all'ipotenusa inclinata rispetto all'orizzontale di un generico angolo θ .

Dalla definizione di pressione si può scrivere:

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow d\vec{F} = p \vec{n} dA = p d\vec{A} \quad (2.1)$$

dove $d\vec{A} = \vec{n} dA$ rappresenta l'elementino di superficie vettorializzato.

Verifichiamo l'equilibrio dinamico, applicando la seconda **legge di Newton**, $\vec{F} = m \vec{a}$, lungo le direzioni y e z (lungo x si hanno forze uguali ed opposte)

$$\sum F_y = p_y \delta x \delta z - p_s \delta s \delta x \sin \theta = \delta m a_y = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y \quad (2.2.a)$$

$$\sum F_z = p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cos \theta = \delta m a_z = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} g \quad (2.2.b)$$

Essendo $\gamma = \rho g = \rho a_z$. Dalla geometria del sistema risulta

$$\delta y = \delta s \cos \theta ; \quad \delta z = \delta s \sin \theta \quad (2.3)$$

Per cui le (2.2) si possono scrivere come

$$p_y - p_s = \rho a_y \frac{\delta y}{2} \quad (2.4.a)$$

$$p_z - p_s = (\rho a_z) \frac{\delta z}{2} \quad (2.4.b)$$

Passando al **limite** per $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$, $p_y = p_s$; $p_z = p_s$, dunque

$$\boxed{p_s = p_y = p_z = p} \quad (2.5)$$

“La pressione in un punto di un fluido in quiete (o in moto in assenza di sforzi tangenziali) è indipendente dalla direzione nella quale viene valutata”

Legge di Pascal: Blaise Pascal (1623-1662)

2.2 Equazione Fondamentale del Campo di Pressione

Dopo aver osservato che la pressione in un punto di un fluido nel quale non siano presenti sforzi tangenziali è indipendente dalla direzione, è necessario valutare la variazione della pressione in funzione della posizione spaziale. In particolare indagheremo la variazione di pressione conseguente alla variazione di quota.

Consideriamo una porzione infinitesima del volume fluido, a forma di parallelepipedo, e indichiamo con p la pressione nel centro del volumetto.

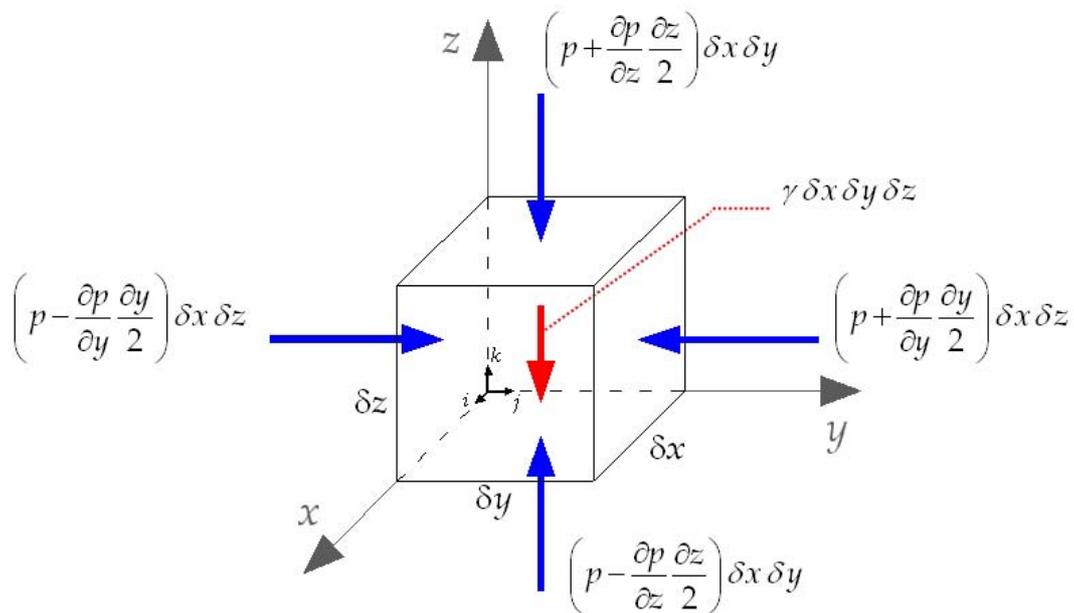


Figura 2.2 – Equilibrio dinamico del volume fluido elementare

Valutiamo l'equilibrio dinamico del volumetto; in assenza di *sforzi tangenziali* avremo solo *forze di volume (forze di campo)* e *forze di superficie*, nella fattispecie la **forza peso** \vec{W} , localizzabile nel baricentro del cubo, e le **forze di pressione** \vec{F}_S , agenti sulle facce esterne. La *seconda legge di Newton* si può dunque scrivere:

$$\sum \vec{F} = \delta \vec{F}_S + \delta \vec{W} = \delta m \vec{a} \quad (2.6)$$

Per valutare il valore della pressione sulle diverse facce consideriamo uno sviluppo in *serie di Taylor* limitato al primo ordine¹.

La forza lungo l'asse y risulta

$$\delta F_y \square \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.7.a)$$

Operando in maniera analoga lungo gli assi x e z si ha

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.7.b)$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.7.c)$$

Il contributo complessivo delle forze di superficie è dato pertanto da

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_x \vec{i} + \delta F_y \vec{j} + \delta F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (2.8)$$

Ricordando che il gradiente di una funzione di campo scalare $f = f(x, y, z)$, come è la pressione, è un vettore

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.9)$$

¹ $f(x + \delta x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \dots$

si ha infine l'espressione compatta:

$$\delta \vec{F}_s = -\vec{\nabla} p (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.10)$$

Per quanto riguarda la forza peso è

$$\delta \vec{W} = - (\gamma \delta x \delta y \delta z) \vec{k} \quad (2.11)$$

Sommando quindi i due contributi della (2.6), risulta

$$-\vec{\nabla} p (\delta x \delta y \delta z) - \gamma (\delta x \delta y \delta z) \vec{k} = \rho (\delta x \delta y \delta z) \vec{a} \quad (2.12)$$

Che, semplificata, diventa

$$\boxed{-\vec{\nabla} p - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a}} \quad (2.13)$$

La (2.13) rappresenta l'Equazione Generale del Moto per un fluido nel quale non agiscono tensioni tangenziali".

2.3 Variazione della Pressione in un Fluido Fermo

Nel caso particolare di **accelerazione nulla** dalla (2.14) si ottiene la nota *Equazione indefinita* (o *in forma differenziale*) dell'*Idrostatica*

$$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{\nabla} p = \gamma \vec{k} \quad (2.14)$$

Nel campo gravitazionale le componenti del gradiente di pressione valgono

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad (2.15)$$

per cui si ha

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\gamma} \quad (2.16)$$

Le (2.14) e (2.16) rappresentano l'Equazione dell'Idrostatica per un fluido immerso nel campo gravitazionale; tale espressione viene utilizzata per determinare le variazioni di pressione dovute ai cambiamenti di quota.

Note:

Le 2.15 mostrano come in un campo di forze gravitazionali le superfici isobariche, cioè luogo dei punti caratterizzati dallo stesso valore di pressione, siano orizzontali. Infatti dalle prime due si vede che la pressione non è funzione delle variabili x e y , ma solo di z .

Variazione della Pressione nei Fluidi Incomprimibili

Dalla (2.17) si può scrivere la variazione di pressione dovuta alla variazione di quota quota, in termini differenziali

$$dp = -\gamma dz \quad (2.17)$$

È quindi possibile integrare l'espressione precedente tra due generiche posizioni a quote differenti (Figura 2.3), tenendo conto che per fluidi incomprimibili è $\gamma = \text{cost}$:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad (2.18)$$

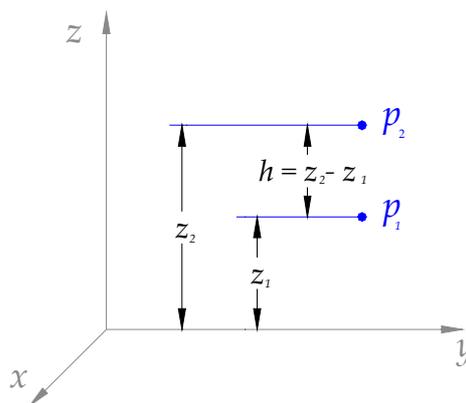


Figura 2.3 – Punti a diverse quote z all'interno di un fluido fermo

$$p_2 - p_1 = -\gamma (z_2 - z_1) \Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma (z_2 - z_1)$$

Chiamando $h = |\Delta z| = |z_2 - z_1|$ e $\Delta p = p_1 - p_2$ risulta

$$\Delta p = -\gamma \Delta z = \gamma h \quad [Pa] = \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (2.19)$$

La differenza di pressione idrostatica tra due punti è direttamente proporzionale alla loro differenza di quota h (Legge di Stevino).

Variazione della Pressione nei Fluidi Comprimibili

Nei gas possiamo trascurare l'influenza che le variazioni di quota hanno sulla pressione, ma solo se le distanze considerate sono ridotte. Negli altri casi, introducendo l'equazione dei gas perfetti nella (2.20), in termini differenziali, si ha

$$\begin{cases} \frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow \rho = \frac{p}{RT} \\ dp = \gamma dz = -\rho g dz \end{cases} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g = -g \frac{p}{RT} \quad (2.20)$$

Separando le variabili e svolgendo l'integrazione

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} \quad \text{con } T = T(z) \quad (2.21)$$

Solo se conosciamo una legge di variazione della Temperatura in funzione della quota possiamo risolvere l'integrale precedente.

Un esempio che ricade nel caso in esame è rappresentato dalla *pressione barometrica dell'atmosfera*. L'andamento della temperatura all'interno dell'atmosfera al variare della quota è schematizzato in figura 2.4 ; si noti che le diverse leggi di variazione sono praticamente lineari.

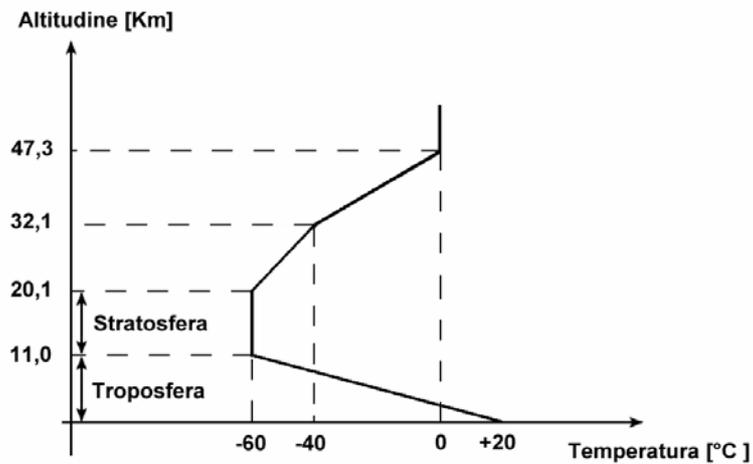


Figura 2.4 – Variazione della temperatura con l'altitudine, all'interno dell'atmosfera terrestre

2.4 Pressione Assoluta e Relativa

E' importante ricordare la differenza tra Pressione Assoluta e Pressione Relativa

- ✓ *Pressione Assoluta*: misurata rispetto al vuoto²
- ✓ *Pressione Relativa*: misurata rispetto alla pressione atmosferica **locale**

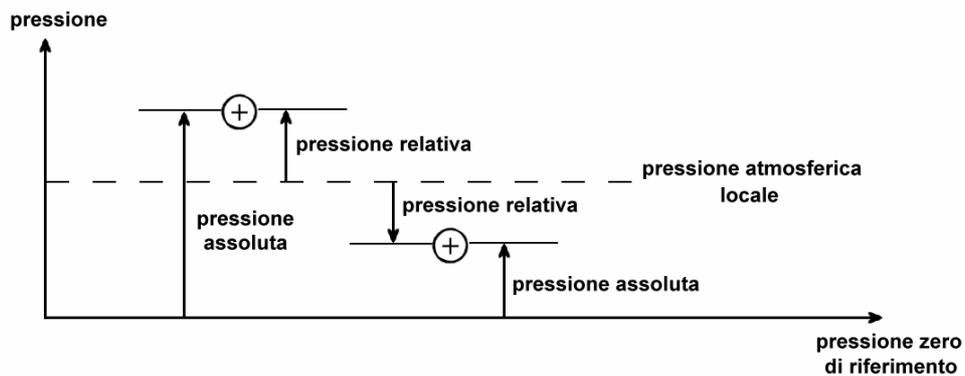


Figura 2.5 – Pressione Assoluta e Relativa

² Quando si richiama l'Equazione di Stato dei Gas deve essere utilizzata la pressione assoluta.

Il valore di temperatura $T \rightarrow 0$ K (zero assoluto) corrisponde infatti a $p \rightarrow 0$ (vuoto)

Nota

- La Pressione Assoluta è sempre positiva
- La Pressione Relativa può essere positiva o negativa

2.5 Unità di misura

L'unità di misura della pressione nel *Sistema Internazionale* (S.I.) è il *Pascal* [*Pa*]

$$[Pa] = \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Sovente per definire la medesima grandezza viene utilizzato il *bar*

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

Allo stesso scopo è di uso comune il riferimento ad un valore medio annuo della pressione atmosferica ad una certa latitudine, l'*atmosfera standard*

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

2.6 Misure della Pressione Atmosferica

Barometro a Mercurio (*Hg*) o *Barometro di Torricelli*³

La misura della pressione atmosferica si può effettuare con strumenti molto semplici, applicando concretamente l'equazione dell'idrostatica. Un esempio classico è rappresentato dal Barometro di Torricelli, schematizzato in Figura 2.6.

³ Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

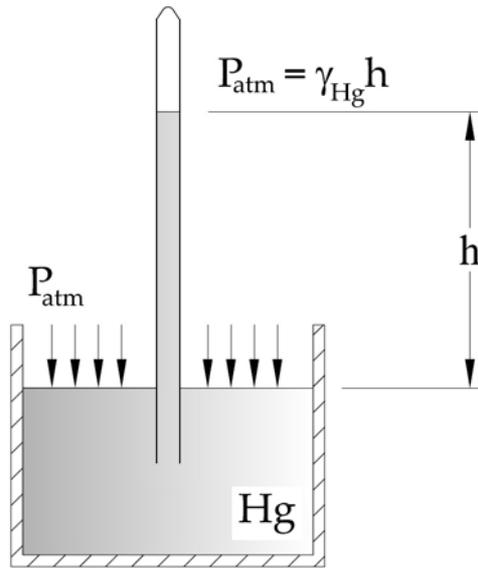


Figura 2.6 – Barometro a Mercurio o barometro di Torricelli

Un tubo in vetro aperto ad una estremità viene riempito di mercurio. Quindi, tenendola chiusa, la cannula viene rovesciata ed immersa in una ampia bacinella contenente ancora mercurio, col pelo libero in atmosfera. Aprendo la cannula, il livello del mercurio al suo interno diminuisce, ma si arresta ad una certa quota h , in virtù della spinta esercitata dalla pressione atmosferica sulla superficie libera della bacinella. Ricordando che la densità del mercurio è pari a $\rho_{Hg} = 13595 \text{ kg m}^{-3}$, dalla (2.20) si può ricavare il valore della pressione atmosferica

$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h \quad [Pa]$$

Tale valore può essere espresso direttamente come altezza della colonna di mercurio, mm_{Hg} . Nella fattispecie la atmosfera standard equivale a

$$h = \frac{p_{atm}}{\gamma_{Hg}} \frac{[Pa]}{[N m^{-3}]} = \frac{101325 \text{ N m}^{-2}}{9.81 \text{ m s}^{-2} 13595 \text{ kg}_{Hg} \text{ m}^{-3}} \cong 760 \text{ mm}_{Hg}$$

2.6 Manometria

Si tratta di una tecnica per la misura della pressione basata ancora sulla equazione dell'idrostatica e che implica quindi l'uso di colonne di liquido in tubi verticali o inclinati di diverso tipo:

- 1) *Piezometro*
- 2) *Manometro a U*
- 3) *Manometro inclinato*

Piezometro

Tale strumento è costituito da un tubo cavo, sul quale è riportata una scala graduata. Il tubo ha un'estremità aperta ed un'altra affacciata su di un recipiente o un condotto. Si tratta di uno strumento dove il fluido di misura è lo stesso del misurando. L'equazione che descrive il suo utilizzo è

$$p = \gamma h + p_0 \tag{2.23}$$

dove

γ = peso specifico del liquido, sovente acqua

h = altezza

p_0 = pressione di riferimento, tipicamente quella atmosferica locale, in tal caso l'equazione caratteristica si può scrivere in termini di pressione relativa, $p_r = \gamma h$

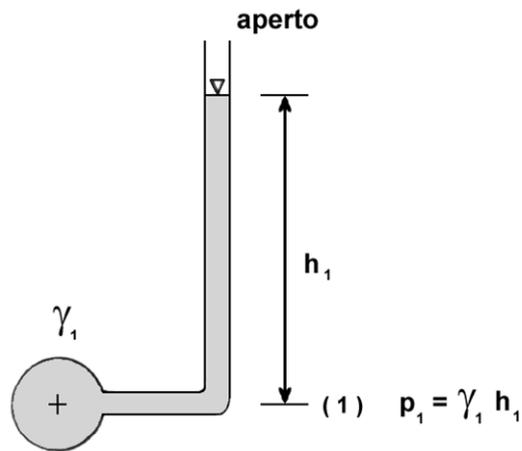


Figura 2.7 – Piezometro

- ✓ *Vantaggi:* Molto semplice e preciso
- ✓ *Svantaggi:* Non adatto per misurare valori elevati di pressione

Manometro a U

Tale strumento è costituito da due tubi paralleli posti in comunicazione, con una estremità aperta in atmosfera (p_0) e l'altra affacciata sull'ambiente di misura (fig. 2.8). Consideriamo il caso in cui sia presente un unico liquido di misura, con densità γ_2 , mentre il fluido da misurare ha densità γ_1 . La pressione vigente nel bulbo A è alla quota (1), quindi

$$p_A \equiv p_1$$

così pure la quota (2) equivale alla (3), ed essendo il fluido interposto lo stesso risultano coincidenti i valori di pressione

$$p_2 \equiv p_3$$

Applicando quindi l'equazione di Stevino all'espressione precedente è

$$p_A + \gamma_1 h_1 = p_0 + \gamma_2 h_2 \quad (2.24)$$

Ovvero in termini relativi ($p_0 = 0$)

$$p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \quad (2.25)$$

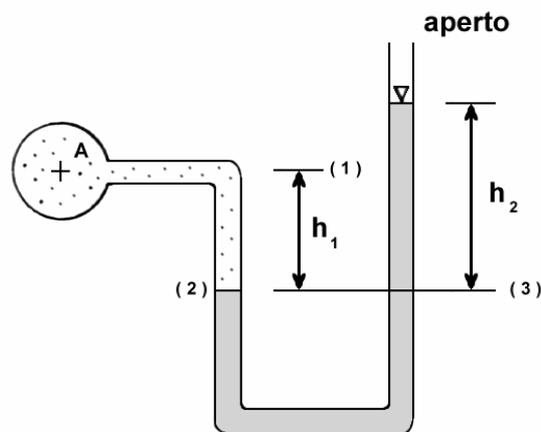


Figura 2.8 – Manometro a U

Nota

- In questo tipo di strumento i liquidi più comunemente utilizzati sono acqua (H₂O), alcool e Mercurio (Hg)
- Usando liquidi diversi nello stesso tubo, essi devono essere immiscibili
- Quando si fanno misure estremamente accurate bisogna tenere sotto stretta osservazione la temperatura dei fluidi, in quanto i pesi specifici variano con essa

Manometro a U differenziale

Si tratta di una particolare applicazione della tipologia precedente, nella quale non si ha una pressione di riferimento, ma i tubi si affacciano su due ambienti in pressione. Con riferimento alla figura 2.9, l'equazione fondamentale (*catena manometrica*) è:

$$p_A + \gamma_1 h_1 = p_B + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$$

Per cui risulta

$$\Delta p = p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1 \quad (2.26)$$

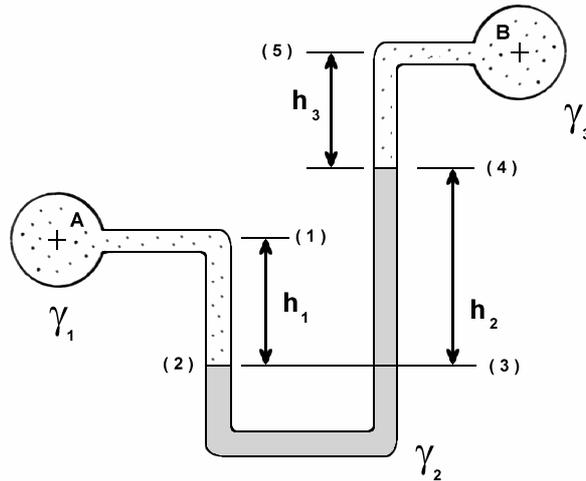


Figura 2.9 – Manometro a U differenziale

Manometro Inclinato

L'utilizzo del manometro inclinato è indicato per misurare piccole variazioni di pressione, garantendo una migliore risoluzione rispetto alla tipologia verticale.

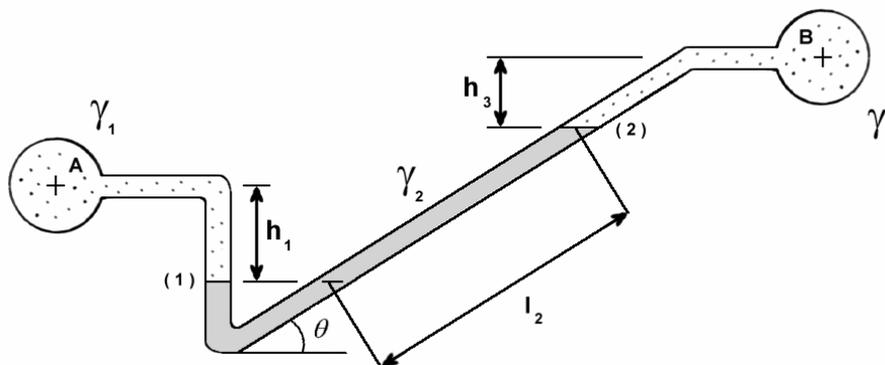


Figura 2.10 – Manometro inclinato

Dalla legge dell'idrostatica, con riferimento alla figura 2.10 si ha

$$p_A + \gamma_1 h_1 = p_B + \gamma_2 l_2 \sin \theta + \gamma_3 h_3 \Rightarrow p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \sin \theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1 \quad (2.27)$$

Se i volumi A e B contengono **gas** possiamo scrivere

$$p_A - p_B \cong \gamma_2 l_2 \sin \theta, \quad l_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 \sin \theta} \quad (2.28)$$

Per misure ad alta precisione e per le operazioni di taratura lo strumento tuttora più diffuso è il *micromanometro di Betz*, che può essere assimilato ad un manometro ad U, dove il tubo a contatto con il punto di misura ha una sezione notevolmente maggiore del tubo a contatto con la pressione atmosferica. Esso è caratterizzato da una risoluzione (minima differenza rilevabile di pressione) pari a $2/10 \text{ mm}_{H_2O}$.

2.7 Dispositivi Meccanici ed Elettrici per la Misura della Pressione

Sebbene i manometri a liquido siano tuttora largamente utilizzati, essi non sono adatti per misurare pressioni molto alte o pressioni che variano rapidamente col tempo. Sia in ambito industriale che nella ricerca vengono utilizzate pertanto diverse tipologie di *Trasduttori Elettronici di Pressione*.

In tali sistemi la pressione (o la differenza di pressione) agisce determinando la deformazione di un elemento sensibile. Tale deformazione viene rilevata e quindi trasformata in segnale elettrico, più facilmente trattabile dai moderni sistemi di acquisizione dati. A seconda della modalità con la quale viene effettuata tale trasformazione, i trasduttori si distinguono in:

- Capacitivi
- Induttivi
- Piezoelettrici

- Piezoresistivi

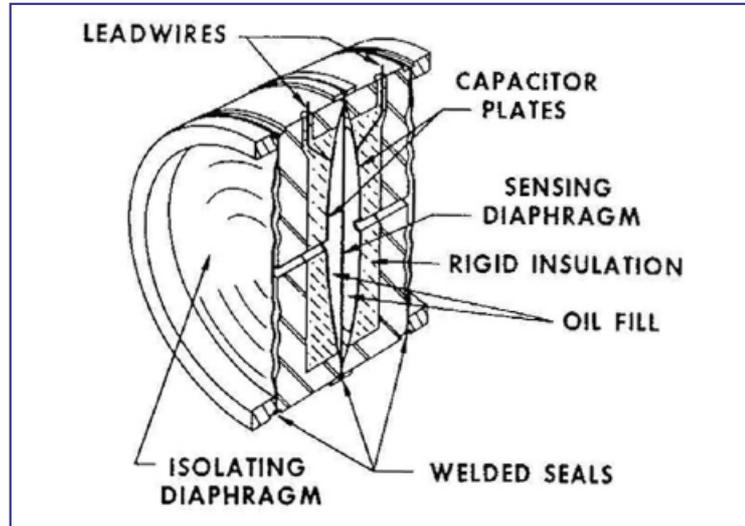


Figura 2.11 – Vista e sezione di un trasduttore capacitivo

2.8 Forza Idrostatica su una Superficie Piana

La determinazione delle forze esercitate dai fluidi sulle superfici che li racchiudono è molto importante per il progetto di serbatoi, navi, dighe e tutte le strutture simili sottoposte a pressione.

Per un fluido in quiete la forza agente su una superficie infinitesima è perpendicolare alla superficie stessa (non sono presenti sforzi di taglio). Pertanto nel caso di una superficie finita **orizzontale** (superficie isobarica) come quella della Figura 2.11, il modulo della forza risultante è:

$$F_R = \int_A dp = \int_A \gamma h dA = \gamma h \int_A dA = \gamma h A = p A \quad (2.29)$$

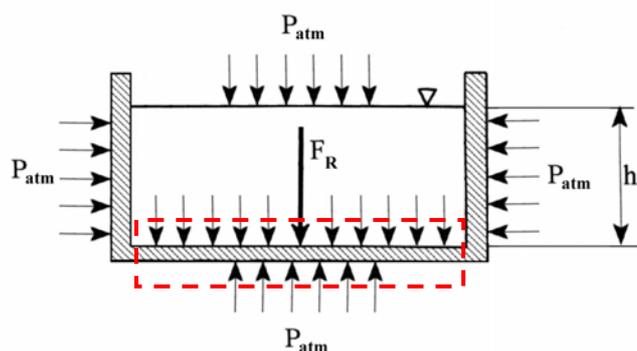


Figura 2.12 – Superficie piana orizzontale sottoposta a pressione

Essendo una somma di forze infinitesime di modulo eguale, la forza risultante ha il punto di applicazione in corrispondenza del baricentro della sezione orizzontale.

Calcoliamo ora la forza esercitata dal fluido per un caso più generale, in cui la superficie piana di contatto sia **inclinata** di un certo angolo θ (Figura 2.13). Si consideri un sistema di riferimento caratterizzato da un asse delle y rivolto verso il basso e orientato come la superficie inclinata. L'asse delle x è orizzontale e diretto normalmente al disegno e l'origine si trova sul punto corrispondente alla

pressione atmosferica. Nel caso rappresentato esso coincide con il pelo libero del serbatoio, ma in generale (ad esempio un serbatoio in pressione, ciò non avviene).

Data una porzione elementare di superficie dA , di coordinate (x,y) , indichiamo con h l'affondamento rispetto all'origine del sistema di riferimento. La forza esercitata dal fluido sulla superficie elementare ha modulo dato da

$$dF = \gamma h dA = \gamma y \sin \theta dA \quad (2.30)$$

Il modulo della forza risultante sull'intera superficie si ottiene come

$$F_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin \theta dA = \gamma \sin \theta \int_A y dA \quad (2.31)$$

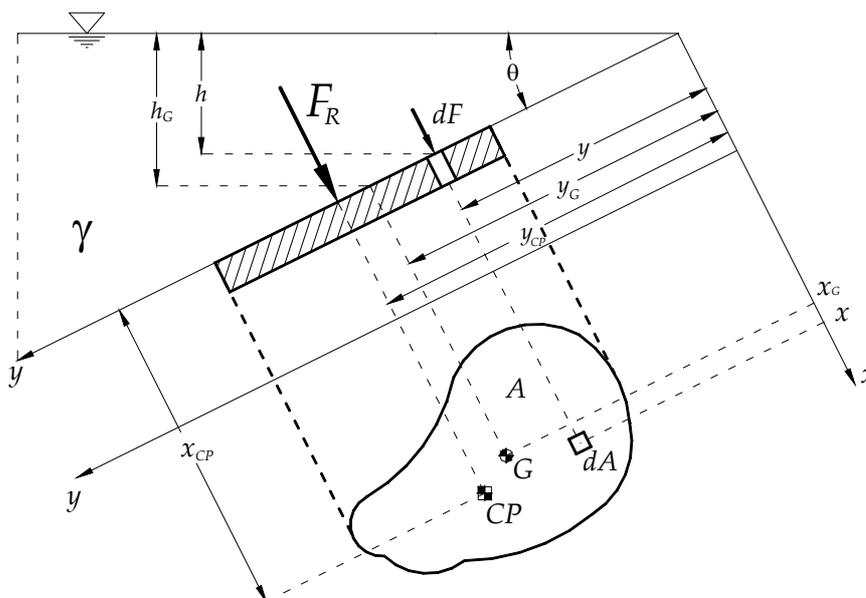


Figura 2.13 – Superficie piana inclinata sottoposta a pressione

La quantità: $\int_A y dA$ rappresenta il *Momento Statico* dell'area A rispetto all'asse x .

Se è nota la posizione del *baricentro* G (inteso come baricentro geometrico dell'area A), è possibile esprimere il momento statico come

$$y_G A = \int_A y dA \quad (2.32)$$

Otteniamo così l'espressione del **modulo** della forza risultante in funzione dell'affondamento del baricentro

$$F_R = \gamma y_G \sin \theta A = \gamma h_G A \quad (2.33)$$

Il modulo della forza è pertanto indipendente dall'angolo θ , e dipende solo da γ e h_G .

Il **punto di applicazione** della risultante non coincide con il baricentro della superficie, ed è individuato dal *Centro di Pressione (CP)*. Per una generica superficie immersa in un fluido il CP si può trovare imponendo la verifica dell'equilibrio statico alla rotazione: il momento della forza risultante deve essere uguale al momento delle forze di pressione distribuite.

$$F_R y_{CP} = \int_A y dF = \int_A y \gamma y \sin \theta dA = \int_A \gamma \sin \theta y^2 dA \quad (2.34)$$

Sostituendo l'espressione di F_R precedentemente ricavata si ha

$$y_{CP} = \frac{\int_A \gamma \sin \theta y^2 dA}{\gamma A y_G \sin \theta} = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I_x}{y_G A} \quad (2.35)$$

nella quale figura al numeratore il *momento d'inerzia* rispetto all'asse x , I_x .

Ricordando il *teorema di trasposizione*

$$I_x = I_{x_G} + A y_G^2 \quad (2.36)$$

dove I_{x_G} è il momento d'inerzia dell'area rispetto ad un asse passante per il baricentro e parallelo all'asse x , si ha infine

$$y_{CP} = \frac{I_{x_G}}{y_G A} + y_G \quad (2.37)$$

Essendo sempre $I_{x_G} / y_G A > 0$, la risultante delle forze di pressione agenti su una superficie piana passa per un punto che si trova sempre al di sotto del baricentro della medesima superficie: $y_{CP} > y_G$

Per calcolare la coordinata x_G si può operare in maniera analoga

$$F_R x_{CP} = \int_A x dF = \int_A \gamma \sin \theta x y dA \quad (2.38)$$

$$x_{CP} = \frac{\int_A x y dA}{y_G A} = \frac{I_{xy}}{y_G A} \quad (2.39)$$

Dove I_{xy} è il prodotto d'inerzia rispetto agli assi x e y . Applicando ancora il teorema di trasposizione (2.36)

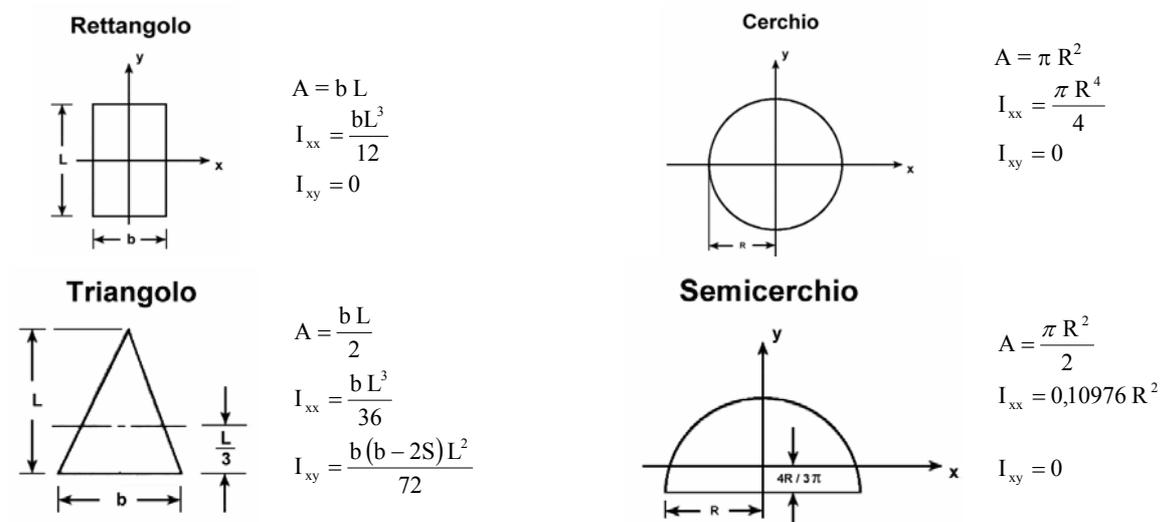
$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + A x_G y_G \quad (2.40)$$

dove $I_{x_G y_G}$ è il prodotto d'inerzia rispetto a un sistema di assi ortogonali paralleli agli assi x e y e passante per il baricentro dell'area, si ha quindi

$$x_{CP} = \frac{I_{x_G y_G}}{y_G A} + x_G \quad (2.41)$$

Nota

Coordinate baricentriche e momenti d'inerzia di alcune aree comuni:



Prisma di Pressione

La forza esercitata da un fluido su una superficie piana può essere valutata attraverso una semplice rappresentazione grafica (Figura 2.13).

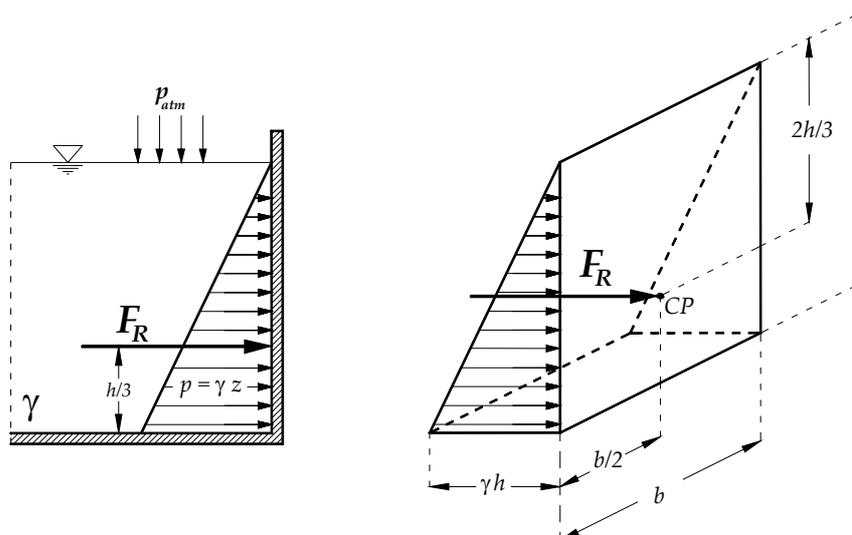


Figura 2.14 – Prisma di pressione

Per il legame lineare tra la pressione e l'affondamento espresso dalla legge di Stevino, la pressione media p_m vige alla profondità $h/2$ e, perciò, la forza risultante agente su una sezione rettangolare avente area $A = bh$ è data da

$$F_R = p_m A = \gamma \frac{h}{2} A \quad (2.42)$$

Ma questo risultato è anche uguale al volume del prisma delle pressioni, quest'ultimo essendo definito come il solido rappresentato dai vettori aventi modulo uguale alla pressione idrostatica locale, rappresenta

$$F_R = \text{Volume} = \gamma \left(\frac{h}{2} \right) A = \frac{1}{2} (\gamma h) bh \quad (2.43)$$

Inoltre essendo $h/2 = h_G$, si ottiene $F_R = \gamma h_G A$, che coincide con la (2.33).

Per individuare il **Centro di Pressione** applichiamo le (2.37) e (2.41)

$$y_{CP} = \frac{I_{x_G}}{y_G A} + y_G = \frac{bh^3/12}{(b/2)bh} + \frac{h}{2} = \frac{2}{3}h \quad (2.44)$$

$$x_{CP} = \frac{I_{xy_G}}{y_G A} + x_G = \frac{0}{\frac{b}{2}A} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \quad (2.45)$$

Nota

- ✓ L'uso dei prismi di pressione per determinare la forza agente su di una superficie immersa è conveniente se l'area di contatto è rettangolare, affinché il volume e il baricentro possano essere facilmente determinati.
- ✓ L'effetto della pressione atmosferica su una superficie immersa non è stato considerato, poiché, come mostra la distribuzione delle pressioni rappresentata in figura 2.15, essa agisce sia sulla parete esterna che su quella interna, annullandosi.

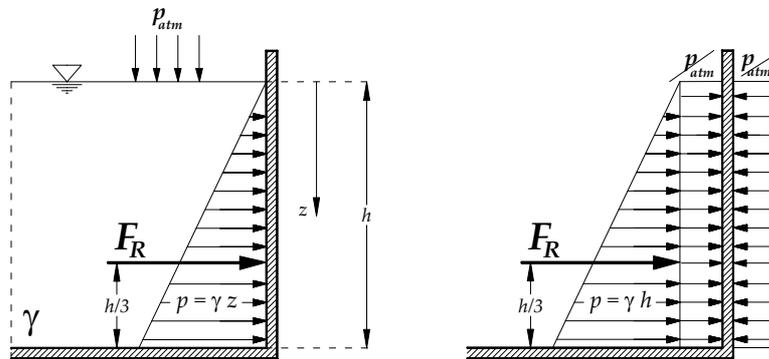


Figura 2.15 – Prisma di pressione e pressione atmosferica

2.9 Forza Idrostatica su una Superficie Curva

Molte delle superfici presenti nelle dighe, serbatoi e tubi non sono piane. Non essendo però possibile sviluppare delle formule generali, impiegheremo, come approccio alternativo, un metodo che prevede di imporre l'equilibrio delle forze agenti sul volume di fluido racchiuso dalla superficie curva interessata e da superfici piane opportunamente scelte. Per queste ultime, i paragrafi precedenti hanno mostrato come valutare il modulo delle forze agenti e il Centro di Pressione.

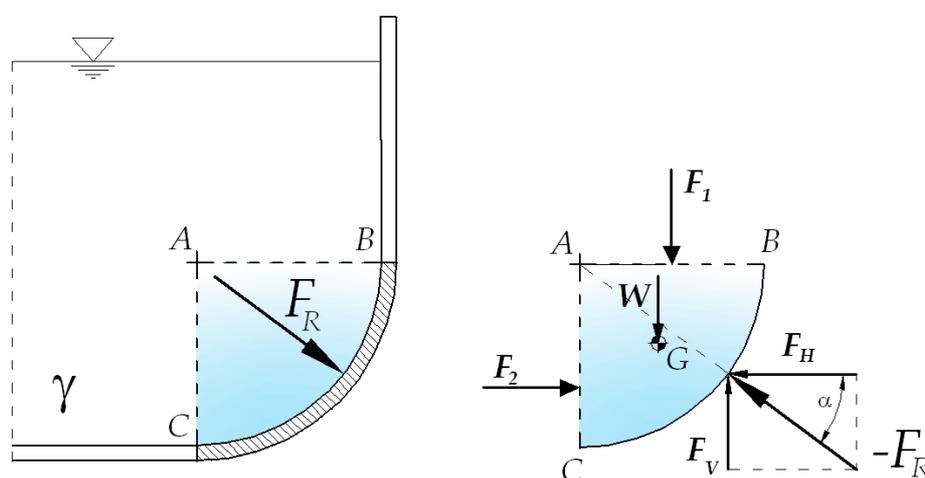


Figura 2.16 – Forza idrostatica su una superficie curva

Con riferimento alla figura 2.16, occorre determinare la forza risultante F_R sulla superficie curva BC ed il suo punto di applicazione. Si osservi come venga individuato un volume di controllo ABC, costituito dalla superficie curva BC e da due superfici piane AC e AB. Tale volume è idealmente *isolato* e su di esso sono applicate le forze che agivano nella situazione reale. Esse saranno:

- la forza W dovuta al peso del fluido, applicata nel centro di massa G
- la forza verticale F_1 , dovuta alla pressione del fluido sulla superficie AB e applicata nel relativo Centro di Pressione;

- la forza orizzontale F_2 , dovuta alla pressione del fluido sulla superficie AC e applicata nel relativo Centro di Pressione;
- la forza $\mathbf{S}=-\mathbf{F}_R$ applicata dalla paratia solida (superficie curva) BC al volume di controllo;

Il metodo utilizzato permetterà di ricavare la forza \mathbf{S} che è uguale e contraria alla forza \mathbf{F}_R , incognita del problema. L'equazione *vettoriale* che esprime l'equilibrio alla traslazione del volume è:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{S} = 0$$

Le componenti in direzione verticale, F_V , e orizzontale, F_H , possono essere determinate come per le superfici piane. Nella stessa direzione, ma in verso opposto alla forza idrostatica, agisce la reazione della parete sul fluido, scomponibile nelle componenti F_H , F_V . In realtà noi ricaveremo queste ultime, ma è sufficiente un cambio di segno per passare alle azioni esercitate dal fluido.

L'equazione vettoriale può essere scissa nelle due equazioni *scalari* di equilibrio alla traslazione lungo x e y :

$$F_2 - F_H = 0 \tag{2.46}$$

$$F_1 + W - F_V = 0 \tag{2.47}$$

Si tratta di un sistema di 2 equazioni in 2 incognite e pertanto può essere risolto facilmente. La risultante si ricava in modulo come

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \tag{2.48}$$

mentre la sua retta d'azione è inclinata rispetto all'orizzontale dell'angolo α

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{F_V}{F_H} \tag{2.49}$$

Per soddisfare la condizione di equilibrio statico alla rotazione F_2 , la risultante di $(F_1 + W)$ e la reazione della parete $-F_R$ devono formare un *Sistema di Forze Concorrenti* e la sommatoria dei relativi momenti è quindi nulla. Anche F_R passa per il punto A , in cui si incontrano le risultanti delle forze di pressione agenti sulla superficie curva BC e, nota l'inclinazione, è dunque individuato anche il suo punto di applicazione.

Per determinare il punto di applicazione della forza F_R anche in situazioni più complesse è sufficiente scrivere l'equilibrio alla rotazione per il volume *di controllo* intorno ad un punto scelto arbitrariamente.

Nota

Per il *principio di azione e reazione*, la forza risultante che il fluido imprime sulla superficie curva BC è uguale e opposta a quella che la paratia curva BC applica al fluido

2.10 Galleggiamento, Spinta Idrostatica e Stabilità

Si consideri un corpo immerso totalmente o parzialmente in un fluido come mostrato in figura 2.16. Su di esso agirà una forza verticale, chiamata forza di galleggiamento o *spinta di Archimede* che, come si vedrà nel seguito, è dovuta all'aumento della pressione idrostatica con la profondità.

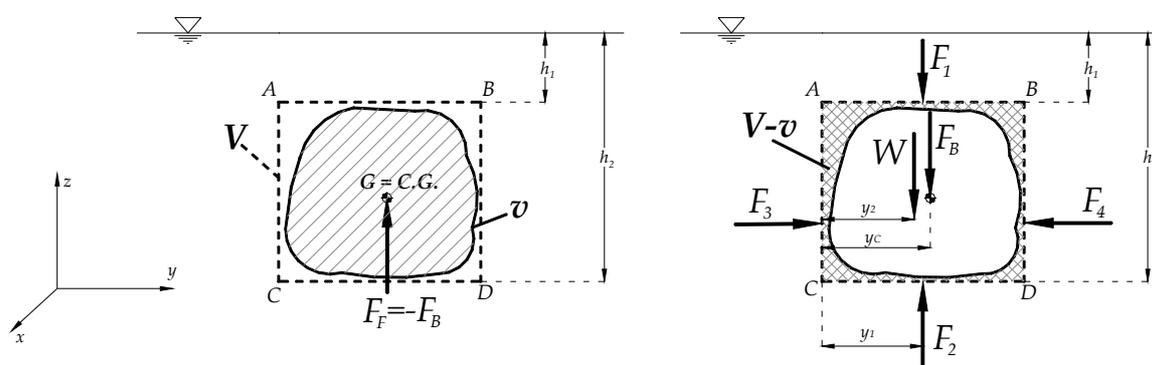


Figura 2.17 – Galleggiamento

Il principio di Archimede⁴ afferma che

“La forza di galleggiamento ha modulo pari al peso del fluido spostato dal corpo ed è rivolta verso l’alto”

Si consideri il parallelepipedo di base ABCD che racchiude il corpo immerso, figura 2.16, estraiamolo idealmente dal fluido e togliamo dal suo interno il corpo. Resterà all’interno del parallelepipedo solo il volume di liquido compreso tra la sagoma del corpo e le pareti del parallelepipedo.

⁴ Archimede di Siracusa (287-212 a.C)

Su tale volume agiranno le forze:

- W , forza dovuta al peso del volume di liquido compreso tra le pareti del parallelepipedo ed la superficie del corpo immerso;
- F_1, F_2 , forze idrostatiche verticali agenti sulle superfici piane AB, CD;
- F_3, F_4 , forze idrostatiche orizzontale agenti sulle superfici piane AC, BD;
- F_B , forza applicata dalla superficie del corpo immerso al volume di controllo considerato. Si ipotizza rivolta verso il basso.

Applichiamo le equazioni dell'equilibrio alla traslazione al sistema precedentemente descritto

$$\text{asse } y \quad F_3 = F_4 \quad (2.50)$$

$$\text{asse } z \quad F_B = F_2 - F_1 - W \quad (2.51)$$

. Se $\gamma = \text{cost}$, applicando l'equazione dell'idrostatica possiamo scrivere che

$$F_2 - F_1 = \gamma(h_2 - h_1)A = \gamma V \quad (2.52)$$

A rappresenta l'area della superficie AB (o CD) del parallelepipedo mentre V è il volume del parallelepipedo. Indicando con v il volume del corpo immerso, sostituendo la (2.52) nella (2.51), si ottiene:

$$F_B = \gamma(h_2 - h_1)A - \gamma[V - v] = \gamma V - \gamma [V - v] \quad (2.53)$$

Si ha quindi

$$F_B = \gamma v \quad (2.54)$$

La spinta del fluido sul corpo avrà uguale modulo e direzione, ma verso opposto.

La posizione della linea d'azione della *forza di Archimede* può essere determinata scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto, ad esempio, al punto A di figura 2.17. Si ottiene

$$F_B y_c = (F_2 - F_1) y_1 - W y_2 \quad (2.55)$$

dove y_c è la coordinata y di un punto nel quale si può pensare applicata la risultante delle forze idrostatiche scambiate tra corpo immerso e fluido circostante. Osservando che dalle (2.52), (2.53) e (2.54) si ottiene, rispettivamente, $(\gamma V) y_1 = (F_2 - F_1) y_1$, $\gamma(V - v) y_2 = W y_2$ e $F_B y_c = \gamma v y_c$, la 2.55 si può scrivere

$$v y_c = V y_1 - (V - v) y_2 \quad (2.56)$$

Si può dimostrare che i termini a secondo membro rappresentano il momento statico del volume di fluido spostato v rispetto ad un piano parallelo a xz e passante per A, a sua volta dato dal prodotto del volume per la coordinata y del baricentro. Si deduce pertanto che y_c è uguale alla coordinata y del baricentro del volume v ; analogamente si può dimostrare che l'ascissa x_c coincide con l'ascissa del baricentro del volume del corpo immerso. Da cui la considerazione:

La spinta esercitata dal fluido passa per il baricentro del volume del corpo immerso (Centro di Galleggiamento)

Stabilità

Se il corpo immerso *non è di materiale omogeneo* il suo centro di massa CG (nel quale si può pensare concentrato il la forza peso W), può trovarsi in posizione differente rispetto al baricentro C del volume occupato (che rappresenta il punto d'azione della spinta idrostatica o forza di galleggiamento F_B). Si possono distinguere due differenti situazioni, illustrate in figura 2.18, per un corpo costituito di materiali da diversa densità, maggiore per la zona tratteggiata:

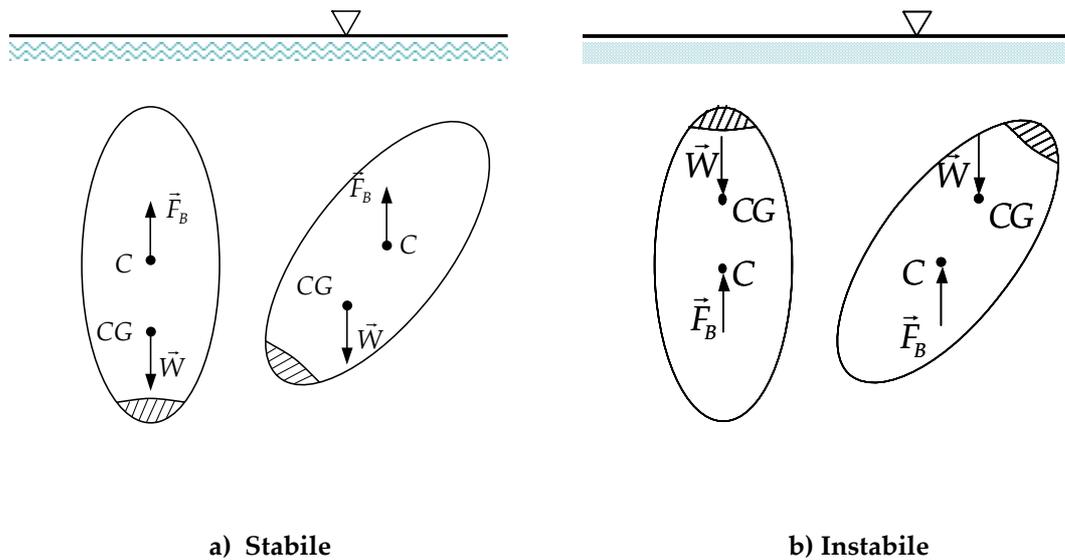


Figura 2.18 – Stabilità

2.11 Variazione di Pressione in un fluido in Movimento come un Corpo Rigido

Nel moto di un fluido come un corpo rigido tutte le particelle del fluido si muovono dello stesso moto traslatorio o con la stessa velocità angolare di rotazione; pertanto non c'è moto relativo tra le particelle e non ci sono sforzi di taglio all'interno del fluido. E' quindi valida l'equazione generale del moto, precedentemente ricavata:

$$-\vec{\nabla}p - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a} \quad (2.14)$$

che nel campo gravitazionale equazione può essere scritta come

$$-\vec{\nabla}p = \rho(\vec{g} + \vec{a}) \quad (2.50)$$

le cui componenti lungo gli assi cartesiani sono

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho a_z \quad (2.51)$$

Fluido in Moto puramente Traslatorio come un Corpo Rigido

Consideriamo un contenitore aperto all'interno del quale sia presente un liquido, che si muova di moto rettilineo uniformemente accelerato. Dopo un periodo di transitorio, l'esperienza mostra che il fluido si dispone con la superficie di pelo libero inclinata, come illustrato in figura 2.18, in una configurazione che risulta stazionaria se vista dal riferimento in moto col carrellino

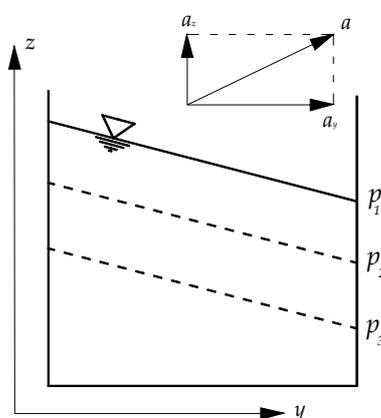


Figura 2.19 – Fluido in moto traslatorio come un corpo rigido

Si trascuri per semplicità la direzione x , analizzando il problema nel piano y - z . La variazione di pressione infinitesima tra due punti molto vicini è

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (2.50)$$

Sostituendo le espressioni (2.51) delle derivate parziali si ha:

$$dp = -\rho a_y dy - \rho (g + a_z) dz$$

L'obbiettivo è quello di ricavare la equazione della superficie $z=z(y)$ del pelo libero e di tutte le superfici isobariche. Ponendo pertanto $dp = 0$ si ottiene:

$$\rho(g + a_z) dz = -\rho a_y dy \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z} \quad (2.51)$$

con $\frac{dz}{dy} \neq 0$, se $a_y \neq 0$.

La superficie libera a $p = \text{cost}$ risulterà pertanto inclinata solo se $a_y \neq 0$.

$$\rho(g + a_z) dz = -\rho a_y dy \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z}$$

Seperando le variabili, è possibile integrare l'equazione differenziale che rappresenta la forma delle superfici isobariche:

$$dz = -\frac{a_y}{g + a_z} dy \quad \Rightarrow \quad z(y) = -\frac{a_y}{g + a_z} y + C$$

Nota

Se $a_y = 0$ e $a_z \neq 0$, la superficie del fluido sarà orizzontale ma la distribuzione delle pressioni non sarà idrostatica, infatti

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(g + a_z)$$

La variazione di pressione è dovuta all'effetto combinato della gravità e della accelerazione indotta esternamente, $\rho(g + a_z)$.

Fluido in Moto Rotatorio come un Corpo Rigido

Si consideri ora un liquido racchiuso all'interno di un contenitore cilindrico aperto, posto in rotazione intorno all'asse z con velocità angolare costante ω , come rappresentato in figura 2.20.

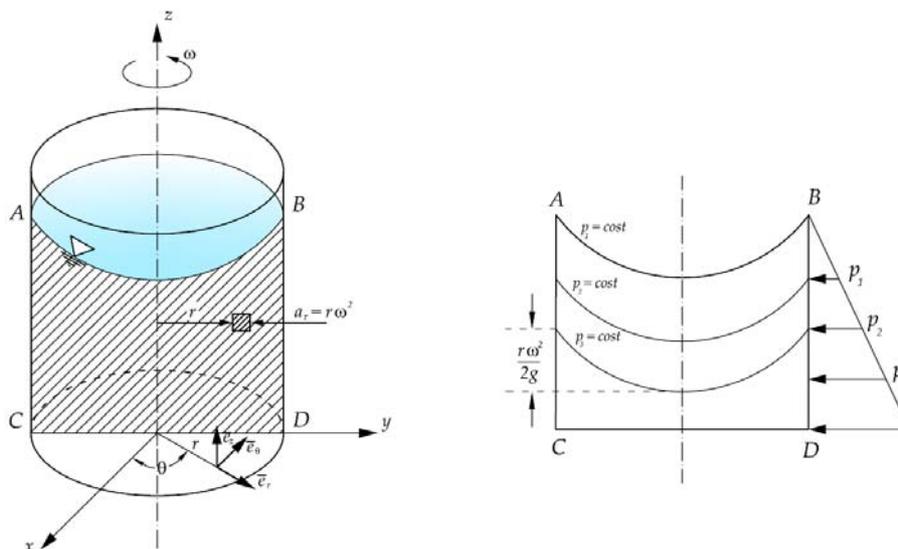


Figura 2.20 – Fluido in rotazione come un corpo rigido

Anche in questo caso l'esperienza mostra che, dopo un periodo di transitorio, il fluido si muove come un corpo rigido e la forma della superficie di pelo libero non si modifica più. Pertanto ciascuna particella fluida individuata dal raggio r e dalla profondità z si muove ruotando intorno all'asse z con la medesima velocità angolare, ω .

L'equazione fondamentale è ancora una volta quella di Eulero

$$-\vec{\nabla}p - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a} \quad (2.22)$$

Si scriva ora l'espressione del gradiente di pressione per un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) :

$$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \quad (2.51)$$

Dove con $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ si sono indicati i versori degli assi del sistema di riferimento cilindrico. Con la sostituzione data dalla 2.51, la (2.13) può essere proiettata sulle tre direzioni, permettendo di ricavare tre equazioni scalari

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho a_r = \rho \omega^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho a_\theta = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_z = -\gamma \end{cases} \quad (\omega = \text{cost}) \quad (2.52)$$

Se il fluido fosse fermo le superfici a pressione statica costante (*isobariche*) apparirebbero perfettamente orizzontali. Ricaviamo ora l'equazione delle *isobariche* per il caso di flusso in rotazione. Si può osservare che le tali superfici sono superfici di rotazione attorno all'asse z e che è quindi sufficiente studiare il problema su un generico piano r - z . Scrivendo il differenziale della funzione pressione e sostituendovi le (2.52) si ha:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \Rightarrow dp = \rho r \omega^2 dr - \gamma dz \quad (2.53)$$

La differenza di pressione tra due punti generici molto vicini è pertanto dovuta all'effetto combinato della forza centrifuga e di quella di gravità. Se si vuole trovare l'equazione della generica superficie isobarica $z = z(r)$, occorre imporre un valore nullo per il differenziale:

$$dp = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\rho r \omega^2}{\gamma} = \frac{r \omega^2}{g} \quad (2.54)$$

Integrando la precedente si ottiene

$$z = \omega^2 r^2 / 2g + \text{cost} \quad (2.55)$$

Tale espressione rivela che le superfici a pressione costante sono *paraboliche*, centrate rispetto all'asse di rotazione, come mostrato in maniera schematica in figura 2.19.

Volendo conoscere il valore locale della pressione, dalla (2.53) si può scrivere

$$\int dp = \rho \omega^2 \int r dr - \gamma \int dz \quad (2.56)$$

svolgendo l'integrazione, si ottiene

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + cost \quad (2.57)$$